

橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定

津田尚胤¹・貝戸清之²・青木一也³・小林潔司⁴

¹学生会員 京都大学大学院修士課程 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:y-tsuda@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 博 (工) (株) BMC (〒261-7125 千葉市美浜区中瀬2-6 WBG マリブウエスト25F)
E-mail:kaito@hashimori.jp

³正会員 京都大学大学院博士課程 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:kazuya_aoki@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

⁴フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:kkoba@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

本研究では橋梁部材の劣化予測のためのマルコフ推移確率モデルを推定する方法論を提案する。その際、橋梁部材の劣化状態を複数の健全度で量化するとともに、時間の経過により劣化が進展する過程をハザードモデルで表現する。その上で、一定期間を隔てた時点間における健全度の推移関係を表すマルコフ推移確率を指数ハザード関数を用いて表現できることを示す。さらに、定期的な目視検査による健全度の判定結果に基づいて、マルコフ推移確率を推定する方法を提案する。ニューヨーク市の橋梁を対象とした実証分析により提案した方法論の有効性を検証するとともに、サンプル数と指数ハザードモデルの推定精度の関係について考察する。

Key Words : *Markovian transition probability, bridge management, hazard function, fixed intervals*

1. はじめに

橋梁のアセットマネジメントでは、ライフサイクル費用の低減化が図れるような最適補修戦略を求めることが重要な課題である。その上で、将来時点における橋梁の補修需要を予測し、橋梁の維持補修のために要する予算計画を策定することが必要となる。橋梁の劣化予測モデルは、ライフサイクル費用や補修需要を予測するために重要な役割を果たす。

橋梁部材の劣化予測モデルとして、1) 過去の目視検査結果に基づいた統計的な劣化予測モデル、2) 力学的メカニズムに基づいた劣化予測モデルが提案されている。対象となる問題によって、いずれの劣化予測モデルを用いるべきかが決定される。たとえば、橋梁群全体としてのマネジメント戦略や予算管理を検討する場合、統計的予測モデルが必要である。一方、具体的な劣化箇所の余寿命や補修戦術を求める場合、力学的メカニズムに基づいた予測モデルが有効であろう。このうち、本研究では前者の立場から、橋梁部材の統計的予測モデルとその推定方法を提案することとする。

橋梁部材の統計的劣化予測モデルとしてマルコフ連鎖モデルがある。マルコフ連鎖モデルでは、橋梁部材の健全度が複数のレーティングにより表現され、橋梁部材の劣化による健全度間の時間的推移過程をマルコフ推移確率を用いて表現する。マルコフ連鎖モデルは操作性が高く、米国の標準的な橋梁マネジメントシステムの1つであるPONTIS等をはじめとして、多くの

橋梁マネジメントにおける劣化予測モデルとして用いられている。これらの事例では、マルコフ推移確率を複数の時点で実施された目視検査により判定された健全度の相対的な推移頻度等を用いて簡易に推定される場合が多い。しかし、目視検査による観測結果の中には橋梁の構造特性や使用環境、目視検査の時間間隔等、異なるデータ特性を持つ橋梁のデータが混在しており、推定したマルコフ推移確率の推定精度が不十分である場合が少なくない。

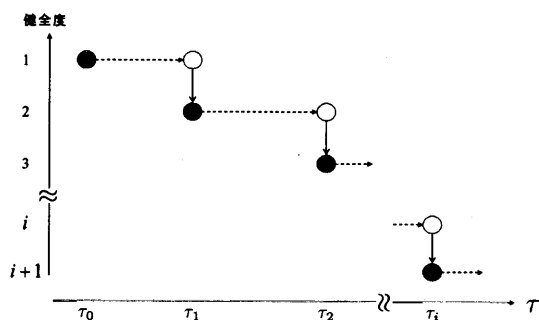
本研究では、個々の橋梁部材の目視検査により判定された健全度情報に基づいて、橋梁劣化のマルコフ推移確率を求める方法を提案する。本研究では個々の橋梁部材の劣化過程をハザードモデルにより表現するとともに、推定されたハザードモデルに基づいてマルコフ推移確率を推定するという方法論を採用する。以下、2.で本研究の基本的な考え方を説明する。3.でハザードモデルを用いたマルコフ推移確率モデルを定式化する。4.でマルコフ推移確率の推定方法について述べ、5.で適用事例について説明する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

橋梁部材の劣化予測に関しては、数多くの研究事例がある。その中でも、貝戸等¹⁾は、ニューヨーク市における橋梁の目視検査データを用いて、橋梁の劣化速度

に着目した平均劣化曲線の算出方法を検討している。また、劣化速度を確率変数と捉えて、過去の検査履歴を反映したマルコフ推移確率の推定方法を提案している。橋梁部材の力学的劣化メカニズムに着目した劣化予測モデルも、数多く開発されている²⁾⁻⁷⁾。しかし、予測モデルの統計学的な推定方法に関しては、初歩的な段階にとどまっており、予測結果の信頼性に多くの問題が残されている。また、マルコフ推移確率の推定方法に関しても研究の蓄積がある。しかし、これらの既往の研究⁸⁾は、2時点間における状態間の推移件数というマクロなカウントデータに基づいて、マルコフ推移確率を推定するという立場をとる。このような集計的なマルコフ推移確率の推定法は取り扱いが簡便であるが、マルコフ推移確率の推定に個々の橋梁部材の構造特性や使用環境といった固有の情報を反映することができないという限界がある。これに対して、本研究では橋梁部材に関する目視検査の結果に基づいて、個々の橋梁部材の劣化過程をハザードモデルで表現する点に特徴がある。ハザードモデルは、信頼性解析の分野で施設や機械の寿命を予測するモデルとして開発され、信頼性解析のみならず多くの分野で適用事例が報告されている。また、ハザードモデルの推定方法についても研究成果が蓄積されており、その結果はいくつかの成書^{9),10)}に詳しい。アセットマネジメントの分野においても、例えばShin等¹¹⁾は、道路舗装のひび割れ開始時刻を予測するためのワイブル型劣化ハザードモデルを提案している。しかし、伝統的なハザードモデルでは、劣化状態が故障の有無という2値状態で表されるような施設や機器を対象としており、複数の健全度を同時に取り扱う橋梁劣化予測にはそのままでは適用できない。また、推移後の状態が複数個存在するような multi destination 型のハザードモデル⁹⁾も提案されている。しかし、橋梁の劣化過程を予測するマルコフ推移確率モデルでは、multi destination 型ハザードモデルが想定するように、ある状態から互いに排他的な状態の中の1つに推移するのではなく、劣化が順次進行することにより健全度が逐次悪化していくという特性がある。このような問題意識の下に、本研究では橋梁部材の劣化により健全度が逐次推移していくという推移関係を、隣接する2つの健全度間での推移過程を表す指数ハザードモデルを合成することにより表現する方法を提案する。その上で、推定したハザードモデルに基づいて、橋梁部材の劣化による健全度の推移過程を表すマルコフ推移確率を推定するという2段階の推定方法を開発する。本研究で提案した推定方法に基づけば、個々の橋梁部材の確率的劣化過程を表すマルコフ推移確率を推定することが可能である。さらに、それらを用いて分析対象とする橋梁部材全体の平均的劣



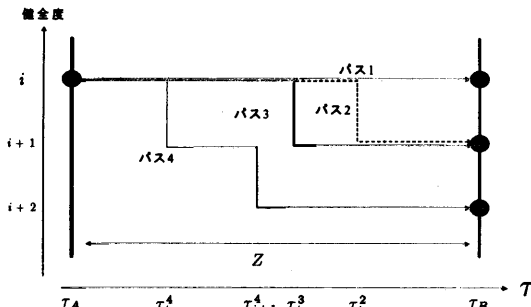
注) ある橋梁部材の劣化過程の例を示している。図中のカレンダー時刻 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i$ に部材の健全度が1つだけ増加している。

図-1 健全度の時間的推移

化過程のマルコフ推移確率も求めることが可能である。

(2) 健全度と定期検査スキーム

橋梁部材の劣化予測モデルを推定するためには、部材の健全度に関する時系列データを蓄積することが必要となる。いま、ある橋梁部材の劣化に関する履歴が図-1に示すように与えられたとしよう。同図は、部材が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。現実には、部材の劣化過程には不確実性が含まれ、しかも健全度は時間軸上の限られた時刻で実施される目視検査を通じてのみ知ることができる。図中、時刻 τ はカレンダー上の実時刻(以下、時刻と呼ぶ)を表す。時刻 τ_0 で橋梁の供用が開始された直後から劣化が始まる。部材の健全度が J 個のレーティングで記述される場合を考えよう。部材の健全度を表すレーティングを状態変数 i ($i = 1, \dots, J$)で表現しよう。部材がもっとも健全な(劣化が進展していない)状態を $i = 1$ で表し、状態変数 i の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。 $i = J$ の場合、当該の部材が使用限界に到達していることを表す。図-1の例では、時間軸上の離散時刻 τ_i ($i = 1, \dots, J-1$)において、それぞれ健全度が i から $i+1$ に進展している。以下、時刻 τ_i は「健全度が i から $i+1$ へ推移する時刻」を表す。橋梁の劣化過程に関する情報は、目視検査を通じて獲得できる。いま、橋梁の定期検査により、橋梁部材の健全度に関する観測情報が獲得できる場合を考えよう。橋梁の供用開始後、定期的に目視検査されていれば理想的であるが、現実には継続的、かつ定期的な目視検査による観測結果を獲得することは難しい。ここでは、時間軸上の2つの時刻 τ_A と τ_B において定期検査が実施された場合を考えよう。時刻 τ_A の定期検査により、



注) ある橋梁部材の劣化過程を表す4種類のサンプルパスを例示している。パス2、パス3ではカレンダー時刻 τ_1^2, τ_1^3 に健全度が1つ進行している。パス4では時刻 τ_1^4, τ_{i+1}^4 に部材の健全度が1つずつ増加している。しかし、定期検査スキームの場合、カレンダー時刻 T_A, T_B での健全度のみが観測されるため、いずれの時点で健全度が変化したかを観測できない。Zは2つの検査の間の時間長を表す。

図-2 健全度の定期検査スキーム

観察対象である部材の健全度が i ($i = 1, \dots, J-1$)であると判定されたとしよう。時刻 T_A において、将来劣化がどのように進展するかは不確実である。劣化過程として無限に多くのシナリオが考えられるが、現実にはその中から1つのパスが実現する。いま、図-2に示すような4つのサンプルパスを考えよう。パス1は、2つの定期検査時刻の間で健全度 i が変化しなかった場合を表している。パス2とパス3では、それぞれ時刻 τ_1^2, τ_1^3 において、劣化が進展し健全度が i から $i+1$ に変化している。これら2つのパスに従った場合、時刻 T_B で観測された健全度は $i+1$ となる。定期検査スキームでは、健全度が i から $i+1$ へ推移した時刻 τ_1^2, τ_1^3 はわからない。さらに、パス4は、定期検査間に時刻 τ_1^4, τ_{i+1}^4 という2つの時刻で健全度が変化した場合を表している。その結果、時刻 T_B において観測された健全度は $i+2$ となる。定期検査では2つの定期検査時刻における健全度を観測できるが、健全度が変化した時刻に関する情報を獲得することは不可能である。

(3) マルコフ推移確率

橋梁部材の推移過程は不確実であり、将来生起する状態を確定的に予測できない。2つの時刻間における部材の健全度の不確実な推移状態をマルコフ推移確率で表現する。のちに3.(4)で言及するように、マルコフ推移確率は任意の時間間隔に対して定義することができる。ここでは、議論を単純にするために、図-2に示した定期検査スキームを用いてマルコフ推移確率を定義しよう。いま、ある部材の劣化予測を行う問題を考えよう。時刻 T_A で観測した当該部材の健全度を状

態変数 $h(\tau_A)$ を用いて表そう。状態変数 $h(\tau_A)$ は時刻 τ_A に測定した健全度であり、観測された健全度が i であれば $h(\tau_A) = i$ と表せる。マルコフ推移確率は、時刻 T_A で観測された健全度 $h(\tau_A) = i$ を与件とし、将来時点(たとえば T_B)において健全度 $h(\tau_B) = j$ が生起する条件付推移確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] = \pi_{ij} \quad (1)$$

と表せる。このような推移確率を健全度ペア (i, j) に対して求めれば、マルコフ推移確率行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{JJ} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を得ることができる。マルコフ推移確率(1)は所与の2つの時点 T_A, T_B の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり、当然のことながら、対象とする時間間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$ ($i > j$)が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=1}^J \pi_{ij} = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0 \\ \pi_{ij} = 0 \text{ (} i > j \text{ の時)} \\ \sum_{j=1}^J \pi_{ij} = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

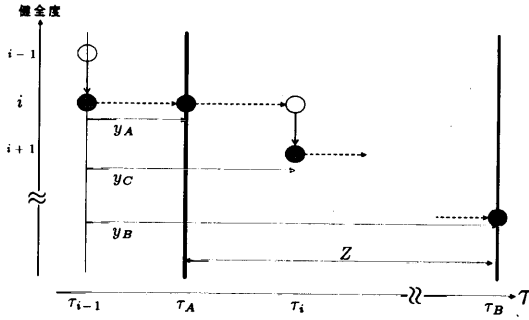
が成立しなければならない。状態 J はもともと劣化した状態を表し、補修がない限りマルコフ連鎖における吸収状態となる。つまり、 $\pi_{JJ} = 1$ が成立する。

なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される。図-2において、検査時刻 T_A において健全度が i であることは検査結果から理解できる。しかし、検査時点 T_A より遡って、どの時刻に健全度が $i-1$ から i に推移したかはわからない。しかし、マルコフ推移確率モデルでは、健全度が $i-1$ から i に推移した時刻に関わらず、検査時刻 T_A から検査時刻 T_B の間に推移する確率は時刻 T_A における健全度のみ依存するという性質(マルコフ性)を満足すると仮定する。マルコフ推移確率モデルは操作性に優れており、マルコフ推移確率モデルは橋梁群の劣化予測や補修戦略を求めるといったマクロなレベルでのアセットマネジメント戦略を検討する場合に用いられる。

3. 非集計マルコフ推移確率

(1) ハザードモデルの定式化

マルコフ推移確率(1)を個別部材の劣化過程を表すハザードモデルを用いて定義しよう。目視点検により獲得できる観測情報には、個別部材の健全度だけでなく部材特性や橋梁の利用状態等、個別部材に特有な非集計データが含まれる。また、橋梁によって検査間隔が



注) カレンダー時刻 τ_{i-1} に健全度が $i-1$ から i に変化した場合、検査が行われる時刻 τ_A, τ_B は時刻 τ_{i-1} を起点とするサンプル時点 y_A, y_B と対応する。図中の劣化サンプルパスの場合、時点 y_C に健全度が1つ進行する。定期検査スキームの場合、時刻 τ_{i-1} を観測できないため、サンプル時間軸上の時点 y_A, y_B, y_C も観測できない。しかし、 $z = y_C - y_A \in [0, Z]$ であるという情報を用いることができる。

図-3 劣化過程のモデル化

異なる場合もある。このような多様なデータに基づいてマルコフ推移確率を推定するためには、個別部材が有する多様性を考慮できる推定方法を開発することが望ましい。本研究では、1) 対象とするサンプルが有する個別情報に基づいて部材劣化のハザードモデルを推定し、2) その結果を用いてマルコフ推移確率を推定するという2段階の推定方法を提案する。ハザードモデルは個々の橋梁部材の劣化過程を対象とした推移確率を推定することを目的としており、ハザードモデルで求めたマルコフ推移確率を非集計マルコフ推移確率と呼ぶこととする。なお、橋梁部材全体を対象とした平均的な推移確率を求める方法については、のちに4.(3)で言及する。

ある橋梁部材の劣化過程をハザードモデルを用いて定式化しよう。ハザードモデルの詳細は文献^{9), 10)}に譲るが、読者の便宜を図るためにハザードモデルを簡単に紹介する。いま、橋梁部材の劣化過程を図-3に示すようにモデル化しよう。カレンダー時刻 τ_{i-1} において、健全度が $i-1$ から i に推移したと考える。ここで、カレンダー時刻 τ_{i-1} を初期時点 $y_i = 0$ とする時間軸(以下、サンプル時間軸と呼ぶ)を導入しよう。サンプル時間軸上の時刻を、以下「時点」と呼び、カレンダー時間軸上の「時刻」とは区別する。検査時刻 τ_A, τ_B は、サンプル時間軸上の時点 y_A, y_B に一致する。当然のことながら、 $y_A = \tau_A - \tau_{i-1}$ 、 $y_B = \tau_B - \tau_{i-1}$ が成立する。なお、定期検査スキームでは健全度 i が始まったカレンダー時刻 τ_{i-1} に関する情報を獲得できない。したがって、サンプル時間軸上の時点 y_A, y_B も正確に把握

できない。記述の便宜上、当面サンプル時点情報が既知であると仮定して議論を進めるが、このことは本質的な仮定ではない。次節で議論するように、サンプル時点情報 y_A, y_B に関する情報を用いなくても、指数ハザードモデルを推定することが可能である。

いま、時刻 τ_i (時点 y_C)において、健全度が i から $i+1$ に推移すると考えよう。この時、当該の部材の健全度が i に留まる期間長(以下、健全度 i の寿命と呼ぶ)は $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1} = y_C$ と表せる。健全度 i の寿命 ζ_i は確率変数であり、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。ただし、健全度 i の寿命 ζ_i の定義域は $[0, \infty)$ である。分布関数の定義より

$$F_i(y_i) = \int_0^{y_i} f_i(\zeta_i) d\zeta_i \quad (4)$$

が成立し、分布関数 $F_i(y_i)$ は健全度が i となった初期時点 $y_i = 0$ (時刻 τ_A)からサンプル時間軸上のある時点 y_i (時刻 $\tau_{i-1} + y_i$)までに健全度が i から $i+1$ に変化した累積確率を表す。したがって、初期時点 $y_i = 0$ からサンプル時点 $y_i \in [0, \infty)$ まで、健全度が i のまま推移する確率 $\bar{F}_i(y_i)$ は、時点 y_i までに健全度が i から $i+1$ に変化する累積確率 $F_i(y_i)$ を用いて

$$\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_i\} = \bar{F}_i(y_i) = 1 - F_i(y_i) \quad (5)$$

と定義できる。ここで、部材の健全度が時点 y_i まで状態 i で推移し、かつ期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に水準 $i+1$ に進展する条件付き確率は

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\bar{F}_i(y_i)} \quad (6)$$

と表せる。いま、対象とする部材の健全度が時点 y_i まで i の状態に推移し、かつ時点 y_i で $i+1$ に推移する確率密度 $\lambda_i(y_i)$ をハザード関数と呼ぶ。

(2) 指数ハザードモデル

橋梁部材の劣化過程がマルコフ性を満足し、ハザード関数がサンプル時間軸上の時点 y_i に依存せず、常に一定値 $\theta_i > 0$ をとると仮定する。すなわち、

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \quad (7)$$

が成立する。指数ハザード関数(7)を用いることにより、橋梁部材の劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現することが可能となる。さらに、 $\theta_i \neq \theta_j$ ($i \neq j$)を仮定する。式(5)の両辺を y_i に関して微分すれば、

$$\frac{d\bar{F}_i(y_i)}{dy_i} = -f_i(y_i) \quad (8)$$

を得る。この時、式(6)は

$$\begin{aligned} \lambda_i(y_i) &= \frac{f_i(y_i)}{\bar{F}_i(y_i)} = -\frac{\frac{d\bar{F}_i(y_i)}{dy_i}}{\bar{F}_i(y_i)} \\ &= \frac{d}{dy_i} \left(-\log \bar{F}_i(y_i) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

と変形できる. ここで, $\bar{F}_i(0) = 1 - F_i(0) = 1$ を考慮し, 式(9)を積分すれば

$$\int_0^{y_i} \lambda_i(u) du = [-\log \bar{F}_i(u)]_0^{y_i} = -\log \bar{F}_i(y_i) \quad (10)$$

を得る. ハザード関数 $\lambda_i(y_i) = \theta_i$ を用いれば, 健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\bar{F}_i(y_i)$ は

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(y_i) &= \exp\left[-\int_0^{y_i} \lambda_i(u) du\right] \\ &= \exp(-\theta_i y_i) \end{aligned} \quad (11)$$

と表される. すなわち, 指数ハザードモデルが得られる. また, 式(8)より, 健全度 i の寿命分布を表す確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ は次式で示される.

$$f_i(\zeta_i) = \theta_i \exp(-\theta_i \zeta_i) \quad (12)$$

いま, カレンダー時刻 τ_{i-1} に健全度が i に推移し, 検査時刻 τ_A まで健全度 i が継続した場合を考えよう. すなわち, 時刻 τ_A における検査の結果, 健全度が i であるという観測結果が得られたとする. この時, サンプル時間軸上の時点 y_A で, 健全度が i であったという条件の下で, さらに時点 y_A から追加的に $z_i (\geq 0)$ 以上にわたって健全度 i が継続する確率 $\bar{F}_i(y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A)$ は

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A) \\ = \text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A\} \end{aligned} \quad (13)$$

と定義できる. 確率 $\bar{F}_i(y_i)$ の定義(5)より,

$$\frac{\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A + z_i\}}{\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A\}} = \frac{\bar{F}_i(y_A + z_i)}{\bar{F}_i(y_A)} \quad (14)$$

が成立する. 式(11)より, 上式の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_i(y_A + z_i)}{\bar{F}_i(y_A)} &= \frac{\exp\{-\theta_i(y_A + z_i)\}}{\exp(-\theta_i y_A)} \\ &= \exp(-\theta_i z_i) \end{aligned} \quad (15)$$

と変形できる. すなわち, 検査時点 y_A において健全度が i に判定され, 次の検査時点 $y_B = y_A + Z$ においても健全度が i に判定される確率は

$$\text{Prob}[h(y_B) = i | h(y_A) = i] = \exp(-\theta_i Z) \quad (16)$$

と表される. ただし, Z は 2 つの検査時点の間隔を表す. 確率 $\text{Prob}[h(y_B) = i | h(y_A) = i]$ はマルコフ推移確率 π_{ii} に他ならない. すなわち, 指数ハザード関数を用いた場合, 推移確率 π_{ii} はハザード率 θ_i と検査間隔 Z のみに依存し, 時点 y_A, y_B に関する確定的な情報を用いなくとも推移確率を推定することが可能となる.

(3) マルコフ推移確率の導出

指数ハザード関数を用いて, 検査時点 y_A と y_B の間に健全度が i から $i+1$ に推移する確率を求めよう. 2 つの検査時点に挟まれた期間 $[y_A, y_B)$ の間に, 健全度が i から $i+1$ に移行する事象が生起するためには, 1) 時点 y_A から時点 $s_i = y_A + z_i$ ($z_i \in [0, Z)$) まで健全度が i のまま推移し, 2) 時点 $y_A + z_i$ において健全度が i から

$i+1$ に推移し, 3) 時点 $y_A + z_i$ から時点 y_B まで, 健全度 $i+1$ が継続しなければならない. 定期検査では健全度が i から $i+1$ に推移した正確な時点を把握できないが, いま健全度の推移が時点 $(y_A + z_i) \in [y_A, y_B)$ に生起したと考えよう. この時, 検査時点 y_A において健全度が i であるという条件の下で, 時点 y_A から時点 $y_A + z_i$ まで健全度が i に留まり, 時点 $y_A + z_i$ で健全度が i から $i+1$ に推移する条件付き確率密度 $g_i(z_i | \zeta_i \geq y_A)$ は

$$\begin{aligned} g_i(z_i | \zeta_i \geq y_A) &= \frac{f_i(z_i + y_A)}{\bar{F}_i(y_A)} = \frac{\theta_i \exp\{-\theta_i(z_i + y_A)\}}{\exp(-\theta_i y_A)} \\ &= \theta_i \exp(-\theta_i z_i) \end{aligned} \quad (17)$$

と表せる. したがって, 検査時点 y_A で健全度が i であり, かつ時点 $y_A + z_i$ において健全度が i から $i+1$ に変化し, かつ検査時点 y_B において健全度が $i+1$ と判定される条件付き確率密度 $q_{i+1}(z_i | \zeta_i \geq y_A)$ は

$$\begin{aligned} q_{i+1}(z_i | \zeta_i \geq y_A) \\ &= g_i(z_i | \zeta_i \geq y_A) \cdot \bar{F}_{i+1}(y_B - z_i - y_A) \\ &= \theta_i \exp(-\theta_i z_i) \exp\{-\theta_{i+1}(Z - z_i)\} \\ &= \theta_i \exp(-\theta_{i+1} Z) \exp\{-(\theta_i - \theta_{i+1})z_i\} \end{aligned} \quad (18)$$

と表せる. 以上の議論では, 健全度が i から $i+1$ に推移する時点 $\bar{s}_i = y_A + z_i$ を固定していた. しかし, 健全度 i の寿命 ζ_i は確率変数であり, z_i は範囲 $[0, Z)$ の中で変化しうる. 2 つの検査時点 y_A と y_B の間で健全度が i から $i+1$ に推移するマルコフ推移確率 π_{ii+1} は

$$\begin{aligned} \pi_{ii+1} &= \text{Prob}[h(y_B) = i+1 | h(y_A) = i] \\ &= \int_0^Z q_{i+1}(z_i | \zeta_i \geq y_A) dz_i \\ &= \int_0^Z \theta_i \exp(-\theta_{i+1} Z) \exp\{-(\theta_i - \theta_{i+1})z_i\} dz_i \\ &= \frac{\theta_i}{\theta_i - \theta_{i+1}} \{-\exp(-\theta_i Z) + \exp(-\theta_{i+1} Z)\} \end{aligned} \quad (19)$$

と表せる. ただし, 上式において, θ_i と θ_j の大小関係に関わらず $\pi_{ii+1} > 0$ が成立する. また, $\theta_i \neq \theta_{i+1}$ の仮定より, $1 > \pi_{ii+1}$ が成立する. 以上の性質は, 式(19)の導出過程より自明であり, 証明は省略する.

つぎに, 2 つの検査時点の間に健全度が i から j ($j \geq i+2$) まで 2 つ以上変化する場合をとりあげよう. 健全度 j の状態が継続する期間長の分布を表す確率密度関数を $f_j(y_j)$, 分布関数を $F_j(y_j)$ と表そう. 健全度 j の状態に関するハザード関数を $\lambda_j(y_j) = \theta_j$ と表す. 期間 $[y_A, y_B)$ の間に, 健全度が i から j に移行する事象が生起するためには, 1) 時点 y_A から時点 $\bar{s}_i = y_A + z_i \in [y_A, y_B)$ まで健全度が i のまま推移し, 2) 時点 $\bar{s}_i = y_A + z_i$ において健全度が i から $i+1$ に推移し, 3) 時点 $\bar{s}_i = y_A + z_i$ から時点 $\bar{s}_{i+1} = \bar{s}_i + z_{i+1} (< y_B)$ まで健全度 $i+1$ が継続し, 時点 \bar{s}_{i+1} において健全度が $i+2$ に推移する. さらに, 4) 時点 $\bar{s}_{j-1} (< y_B)$ に健全度が j に推移し, 時

点 y_B まで健全度 j が継続するという事象が同時に生じなければならない。以上の事象が同時に生じること付き確率密度 $q_j(\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}, \dots, \bar{z}_{j-1} | \zeta_i \geq y_A)$ は

$$\begin{aligned} & q_j(\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}, \dots, \bar{z}_{j-1} | \zeta_i \geq y_A) \\ &= g_i(\bar{z}_i | \zeta_i \geq y_A) \prod_{m=i+1}^{j-1} f_m(\bar{z}_m) \bar{F}_j \left(Z - \sum_{m=i}^{j-1} \bar{z}_m \right) \\ &= \prod_{m=i}^{j-1} \theta_m \cdot \exp \left\{ - \sum_{m=i}^{j-1} \theta_m \bar{z}_m - \theta_j \left(Z - \sum_{m=i}^{j-1} \bar{z}_m \right) \right\} \\ &= \prod_{m=i}^{j-1} \theta_m \cdot \exp \left\{ - \theta_j Z - \sum_{m=i}^{j-1} (\theta_m - \theta_j) \bar{z}_m \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

と表せる。以上の議論では、 $\bar{z}_i, \dots, \bar{z}_{j-1}$ を固定していた。しかし、健全度 i ($i = 1, \dots, J-1$)の寿命 ζ_i は確率変数であり、 $z_i \geq 0, \dots, z_{j-1} \geq 0$ ($j \leq J$)は

$$0 \leq z_i + z_{i+1} + \dots + z_{j-1} \leq Z \quad (21)$$

を満足する範囲の中で自由な値をとる。したがって、検査時点 y_A と y_B の間で健全度が i から j ($j \geq i+2$)に推移するマルコフ推移確率 π_{ij} は若干の計算により

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \text{Prob}[h(y_B) = j | h(y_A) = i] \\ &= \int_0^Z \int_0^{Z-z_i} \dots \int_0^{Z-\sum_{m=i}^{j-2} z_m} \\ &\quad q_j(z_i, \dots, z_{j-1} | \zeta_i \geq y_A) dz_i \dots dz_{j-1} \\ &= \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k Z) \quad (22) \end{aligned}$$

となる(付録参照)。ただし、式(22)より、 θ_m と θ_k 、 θ_{m+1} と θ_k の大小関係に関わらず $1 > \pi_{ij} > 0$ が成立する。また、 π_{iJ} に関しては条件(3)より

$$\pi_{iJ} = 1 - \sum_{j=i}^{J-1} \pi_{ij} \quad (23)$$

が成立する。指数ハザードモデルに基づいて導出したマルコフ推移確率は以下のように整理できる。

$$\pi_{ii} = \exp(-\theta_i Z) \quad (24a)$$

$$\pi_{ii+1} = \frac{\theta_i}{\theta_i - \theta_{i+1}} \{ -\exp(-\theta_i Z) + \exp(-\theta_{i+1} Z) \} \quad (24b)$$

$$\pi_{ij} = \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k Z) \quad (j = i, \dots, J) \quad (24c)$$

$$\pi_{iJ} = 1 - \sum_{j=i}^{J-1} \pi_{ij} \quad (i = 1, \dots, J-1) \quad (24d)$$

(4) マルコフ推移確率の時間的整合性

式(24a)-(24d)に示すように、マルコフ推移確率は検査間隔 Z の値に依存する。このことを明示的に示すために、マルコフ推移確率を $\pi_{ij}(Z)$ と表そう。さらに、検

査間隔 Z に対して定義されるマルコフ推移確率行列を $\Pi(Z)$ と表す。ただし、

$$\Pi(Z) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(Z) & \dots & \pi_{1J}(Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pi_{JJ}(Z) \end{pmatrix} \quad (25)$$

である。いま、2種類の検査間隔 Z と nZ に着目しよう。ただし、 n は整数である。マルコフ推移確率行列 $\Pi(Z)$ と $\Pi(nZ)$ は、同一の劣化現象を異なる時間間隔に対して記述したものである。したがって、2つのマルコフ推移確率行列 $\Pi(Z)$ 、 $\Pi(nZ)$ に対して

$$\Pi(nZ) = \{\Pi(Z)\}^n \quad (26)$$

が成立しなければならない。条件(26)をマルコフ推移確率行列の時間的整合性条件と呼ぼう。マルコフ推移確率行列が時間的整合性条件を満足するためには、マルコフ推移確率 π_{ij} の間に一定の数学的構造が成立しなければならない。指数ハザードモデルを用いて導出した推移確率(24a)-(24d)は時間的整合性条件を満足することが理論的に保証される(付録参照)。換言すれば、推移確率(24a)-(24d)に含まれる検査間隔 Z の値を変化させることにより、任意の時間間隔 Z に対してマルコフ推移確率行列を求めることが可能となる。

4. マルコフ推移確率の推定方法

(1) 定期検査データの内容

同種の橋梁の部材に関する K 個の定期検査データが得られたとする。検査サンプル k ($k = 1, \dots, K$)には、2個の連続する定期検査が実施されたカレンダー時刻 τ_A^k と τ_B^k と、各検査で計測された部材の健全度のレーティング $h(\tau_A^k)$ 、 $h(\tau_B^k)$ に関する情報が記述されている。検査サンプルにより、検査間隔が異なっても差し支えない。以上の検査データに基づいて、検査サンプル k の検査間隔を $Z^k = \tau_B^k - \tau_A^k$ と定義する。さらに、2つの検査時刻における劣化推移パターン情報に基づいて、ダミー変数 δ_{ij}^k ($i, j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$)を

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & h(\tau_A^k) = i, h(\tau_B^k) = j \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (27)$$

と定義する。さらに、橋梁の劣化速度に影響を及ぼす、橋梁の構造特性や使用環境を表す特性ベクトルを $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_M^k)$ と表す。ただし、 x_m^k ($m = 1, \dots, M$)は橋梁部材サンプル k の m 番目の特性変数の観測値を表す。定期検査スキームの下で得られる検査サンプル k が有する情報は $\Xi^k = (\delta_{ij}^k, Z^k, \mathbf{x}^k)$ として整理できる。

一方、橋梁部材サンプル k ($k = 1, \dots, K$)の劣化過程を指数ハザード関数

$$\lambda_i^k(y_i^k) = \theta_i^k \quad (i = 1, \dots, J-1)$$

を用いて表現しよう。健全度 J はマルコフ連鎖の吸収状態であり $\pi_{JJ} = 1$ が成立するためハザード率は定義されない。橋梁の劣化過程を特徴づけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K$) は橋梁部材の特性ベクトルに依存して変化すると考え、ハザード率 θ_i^k を特性ベクトル \mathbf{x}^k を用いて

$$\theta_i^k = \mathbf{x}^k \beta_i' \quad (28)$$

と表そう。ただし、 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ ($m = 1, \dots, M$) による行ベクトルである。記号 \prime は転置操作を表す。マルコフ推移確率の推定手順の第1段階では、検査サンプル情報 \mathbf{z}^k ($k = 1, \dots, K$) に基づいて指数ハザード関数 $\lambda_i^k(y_i^k) = \theta_i^k$ を推定することになる。4.(2)では、指数ハザード関数を推定する方法について述べる。ついで、第2段階においては、推定した指数ハザード関数を用いてマルコフ推移確率を推定することになる。本研究で提案する方法論では、個別部材ごとにマルコフ推移確率を推定することが可能である。しかし、現実の橋梁マネジメントにおいて、個別の部材ごとに最適補修戦略を求めると問題が過度に煩雑になる。このため、類似の部材を対象にして平均的なマルコフ推移確率を推定した方が便利な場合が少なくない。そこで、4.(3)で推定した指数ハザードモデルを用いて平均的なマルコフ推移確率を推定する方法について説明する。なお、指数ハザードモデルを用いれば、橋梁マネジメントのためのリスクマネジメント指標を導出できる。すなわち、当該レーティングにはじめて到達した時点から、劣化が進展して次のレーティングに進むまでの期待期間長（以下、レーティング期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\bar{F}_i(y_i^k)$ を用いて

$$RMD_i^k = \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y_i^k) dy_i^k \quad (29)$$

と表される⁹⁾。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数 $\bar{F}_i(y_i^k)$ が式(11)で表されることに留意すれば、レーティング期待寿命は

$$RMD_i^k = \int_0^{\infty} \exp(-\theta_i^k y_i^k) dy_i^k = \frac{1}{\theta_i^k} \quad (30)$$

と表される。

(2) ハザードモデルの推定方法

検査サンプル k に関して獲得できる情報は $\mathbf{z}^k = (\delta_{ij}^k, \bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ である。記号「 $\bar{}$ 」は実測値であることを示す。マルコフ推移確率は指数ハザード関数を用いて式(24a)-(24d)のように表すことができる。マルコフ推移確率には各健全度におけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K$) が含まれるが、ハザード率は橋梁部材の特性ベクトル $\bar{\mathbf{x}}^k$ を用いて式(28)で表現できる。また、劣化推移確率はデータが観察された検査間隔 \bar{Z}^k にも依存する。このことを明示的に表すため推移確

率 π_{ij} を目視検査による実測データ $(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ と未知パラメータ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{J-1})$ の関数として $\pi_{ij}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta)$ と表そう。いま、 K 個の橋梁部材の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば、全検査サンプルの劣化推移パターンの同時生起確率密度を表す対数尤度関数を

$$\begin{aligned} \ln[\mathcal{L}(\beta)] &= \ln \left[\prod_{i=1}^{J-1} \prod_{j=i}^J \prod_{k=1}^K \{ \pi_{ij}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta) \}^{\delta_{ij}^k} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=i}^J \sum_{k=1}^K \delta_{ij}^k \ln [\pi_{ij}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta)] \quad (31) \end{aligned}$$

と表わせる^{12),13)}。検査データ $\delta_{ij}^k, \bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k$ はすべて確定値であり、対数尤度関数は未知パラメータ β の関数である。ここで、対数尤度関数(31)を最大にするようなパラメータ値 $\hat{\beta}$ の最尤推定値は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})]}{\partial \beta_{i,m}} &= 0, \quad (32) \\ (i &= 1, \dots, J-1; m = 1, \dots, M) \end{aligned}$$

を同時に満足するような $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{1,1}, \dots, \hat{\beta}_{J-1,M})$ として与えられる。最適化条件は $(J-1)M$ 次の連立非線形方程式であり、Newton法を基本とする逐次反復法¹⁴⁾を用いて解くことができる。さらに、パラメータの漸近的な共分散行列の推定値 $\hat{\Sigma}(\hat{\beta})$ は、

$$\hat{\Sigma}(\hat{\beta}) = \left[\frac{\partial^2 \ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})]}{\partial \beta \partial \beta'} \right]^{-1} \quad (33)$$

と表すことができる。ただし、上式の右辺の逆行列は $\partial^2 \ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})] / \partial \beta_{i,m} \partial \beta_{j,m'}$ を要素とする $(J-1)M \times (J-1)M$ 次の Fisher 情報行列の逆行列である。

(3) マルコフ推移確率の平均化操作

マルコフ推移確率は橋梁特性 \mathbf{x}^k と検査間隔 Z^k が与えられれば、式(24a)-(24d)により推定できる。検査間隔 Z^k を変化させることにより、任意の検査間隔に対して時間的整合性の条件を満足するようなマルコフ推移確率行列を推定することができる。本研究で提案した方法により、個々の橋梁部材ごとに、その部材固有のマルコフ推移確率行列を推定することが可能である。しかし、数多くの橋梁全体としての劣化パターンを予測する場合、個別の橋梁部材ごとの推移確率よりも、平均的な推移確率を求める方が便利な場合が多い。そのためには、時間的整合性条件を満足するような推移確率行列の平均化操作法を開発することが必要となる。本研究ではハザード率 θ_i^k ($k = 1, \dots, K$) に着目した平均化操作を提案しよう。いま、対象とする橋梁部材母集団における橋梁特性の分布関数を $\Gamma(\mathbf{x})$ と表そう。この時、母集団におけるハザード率の期待値 $E[\theta_i]$ は

$$E[\theta_i] = \int_{\Theta} \mathbf{x} \beta_i' d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (34)$$

表-1 健全度7段階評価基準¹⁵⁾

| 健全度 | 物理的な意味 (床版) |
|-----|---|
| 1 | 新設状態, 劣化の兆候がほとんどみられない. |
| 2 | 1と3の間 |
| 3 | 一部分で漏水が確認できる. (漏水を伴う一方方向ひび割れ, 端部で斑点状の漏水) |
| 4 | 3と5の間 |
| 5 | 床版面積75%以上から漏水が確認できる. 一部分で剥離や剥落が確認できる. 桁上フランジに沿った遊離石灰が確認できる. |
| 6 | 5と7の間 |
| 7 | 深刻な剥落や遊離石灰が確認できる. 抜け落ちやその傾向が確認できる. |

注) NY市の健全度評価では, 新設状態をレーティング7に, 以降劣化が進行するほどレーティング番号が小さくなるように健全度が表記されている.

と表せる. Θ はサンプル母集団を表す. マルコフ推移確率を指数ハザード関数(24a)-(24d)で推定する場合, 個々のサンプルごとに定義できるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K$)を用いて定義されるマルコフ推移確率行列は時間的整合性条件を満足する. したがって, 平均化操作(34)を用いて推定したマルコフ推移確率行列も時間的整合性条件を満足する.

5. 適用事例

(1) 適用事例の概要

本研究で提案したモデルを, ニューヨーク市 (以下, NY市と略す) が過去10年間(1987~1996年)に実施した目視検査結果を用いて, 実際に推定する. 米国では, すべての橋梁に対して少なくとも2年に一度, 目視検査を実施することが義務付けられている. NY市は2000年時点で, 合計764橋の橋梁を管理している. ちなみに, それらの平均年齢は, 2000年時点で約75歳に達している. NY市では1982年よりNY州の定める橋梁検査マニュアル¹⁵⁾に従って, 上部構造25部材, 下部構造22部材を対象とした目視検査を実施している. 検査結果は, 部材ごとに健全度として7から1のレーティングで評価される. 目視検査は各スパンに対して実施され, 同一部材が複数ある場合には複数あるレーティングの中でもっとも悪い状態のレーティングが当該スパンのレーティングの代表値となる. これらの目視検査の結果は, 橋梁番号ごとにデータベースに保存され, デジタル化される. データベースにはこの他にも橋梁形式, 構造諸元, 所在地, スパン数, 平均交通量などが保存されている.

本研究では, 対象部材として, 直接輪荷重が作用し, 維持管理上の重要部材である床版を取り上げた. 床版を対象とした健全度のレーティングと物理的な意味を

表-1に示す. NY州の橋梁検査マニュアル¹⁵⁾では, 床版に生じる様々な損傷(ひび割れ, 剥離, 漏水・遊離石灰, 抜け落ち等)を損傷毎に区分せずに総合的に評価している. 一方, 我が国の橋梁点検, 例えば橋梁定期点検要領(案)¹⁶⁾では, ひびわれ損傷を中心に劣化メカニズムに則した5段階のレーティング評価(a~e)を与え, さらに各レーティングにはひびわれ幅や長さの範囲が定量的に示されているために, 評価をより客観的に行うことができる. また, ひびわれ性状にかかわらず, 剥離, 鉄筋露出を生じている場合は別項目で評価し, ひびわれからの漏水, 遊離石灰や錆汁はひびわれの項目で評価する. このような差異が存在するものの, 床版の損傷状態に対する両者のレーティングを比較すると, その評価は概ね対応(2→a, 3→b, 4→c, 5→d, 6&7→e)が取れている.

本研究ではこのデータベースの履歴データを用いて指数ハザード関数のパラメータを推定した. 橋梁の構造特性や使用環境を表す特性変数 x として, データの利用可能性を考慮して $x_1 = 1$: 定数項, x_2 : 平均交通量, x_3 : 床版面積(橋面積/スパン数)を採用した. なお, 補修が実施されたり, 検査誤差等の理由により, 定期検査によるレーティングの判定結果が従前のものより回復しているサンプルを除いた. さらに, 平均交通量, 床版面積に関するデータが同時に利用可能であるサンプルのみを抽出した. その結果, 指数ハザードモデルの推定のために合計32,902個のサンプルで構成されるデータベースを作成した. なお, 各サンプルの説明変数である交通量, 床版面積は対象とする総サンプル32,902個の中の最大値を用いて規格化している.

(2) 推定結果

上記のデータベースに基づいて, 指数ハザードモデルを推定した. 同データベースでは, 健全度が7つのレーティングで評価されている. 健全度7の状態を除く合計6つのレーティングに対して6つの指数ハザードモデルが定義される. 各サンプルに対して2つの異なる時点で実施された目視検査におけるレーティングの結果が記述されている. 指数ハザードモデル(28)を, 適用事例で用いる説明変数を用いて具体的に書き表せば,

$$\theta_i^k = \beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k \quad (35)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, K)$$

となる. このように指数ハザードモデルを定義すれば, 6つのレーティングのそれぞれに対して $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3}$ ($i = 1, \dots, 6$)という3つの未知パラメータが存在するため, 合計18個の未知パラメータが存在する. 当初, 18個のパラメータすべてを用いて指数ハザードモデルを推定したが, 符号条件や t -値が低

表-2 指数ハザードモデルの推定結果

| 健全度 | サンプル数 | 定数項 $\beta_{i,1}$ | 平均交通量 $\beta_{i,2}$ | 床版面積 $\beta_{i,3}$ |
|-----|-------|----------------------|------------------------|-----------------------|
| 1 | 2152 | 0.3289 (26.144) | — | 1.3648 (2.547) |
| 2 | 5605 | 0.2071 (25.432) | 0.0779 (2.537) | 0.8427 (5.099) |
| 3 | 14780 | 0.1334 (32.016) | 0.1379 (8.456) | — |
| 4 | 13119 | 0.0847 (21.154) | 0.0961 (6.608) | 0.0755 (3.250) |
| 5 | 4715 | 0.0979 (21.742) | — | — |
| 6 | 993 | 0.1288 (6.951) | 0.3842 (4.067) | — |

注) 括弧内は t -値を表す。サンプル数の数え上げにあたり、健全度 i から j への推移サンプル数は θ_i から θ_j までのそれぞれの健全度に対応する指数ハザードモデルの推定において用いられるため、各健全度の指数モデルの推定に用いたサンプルとして重複して計上している。その結果、サンプル数の総計はデータベースに含まれるデータ数(32,902個)と一致しない。

いパラメータが存在した。そのため、説明変数 x_2^k, x_3^k の有無を変更した組み合わせのそれぞれに対して指数ハザードモデルを推定した。その中で、符号条件を満足し、かつ説明変数の説明力に関する仮説を有意水準5%の t -検定で棄却されないような説明変数の組み合わせを抽出し、対数尤度(31)がもっとも大きくなるような説明変数の組み合わせを選択した。表-2には以上の手順で推定した指数ハザードモデルのパラメータの最尤推定値 $\hat{\beta}$ を示している。また、同表には各健全度の指数モデルを推定するために用いることができるサンプル数と各説明変数の t -値を示している。

推定した指数ハザードモデルを用いてマルコフ推移確率行列を求めることができる。本研究で提案した方法論に基づけば、各サンプルごとにマルコフ推移確率行列を求めることができる。このようにして推定したマルコフ推移確率行列は膨大な量に及ぶため、4.(3)で議論した平均化操作を行うことにより平均的なマルコフ推移確率行列を求めよう。さらに、本研究で提案した推定方法の有効性を分析するために、簡便な数え上げ法を用いて、マルコフ推移確率行列を推定しておく。数え上げ法によるマルコフ推移確率 π_{ij} は

$$\pi_{ij} = \frac{h(\tau_A) = i \text{ かつ } h(\tau_B) = j \text{ である個数}}{h(\tau_A) = i \text{ である個数}} \quad (36)$$

と定義される。ただし、数え上げ法によりマルコフ推移確率を求める場合には、検査間隔を固定する必要がある。そこで、最も多くのサンプルデータが取れる検査間隔として2年を選択している。その結果、データサンプル数は26,748個となる。また、このように作成したデータベースに含まれるサンプルの平均交通量は

表-3 レーティング期待寿命

| 健全度 | $E[\theta_i]$ | $E[RMD_i^k]$ (年) (推定結果) | $E[\overline{RMD}_i^k]$ (年) (数え上げ) |
|-----|---------------|----------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 0.3074 | 3.25 | 3.49 |
| 2 | 0.2605 | 4.33 | 4.38 |
| 3 | 0.1653 | 6.27 | 6.29 |
| 4 | 0.1048 | 10.04 | 9.43 |
| 5 | 0.0866 | 11.55 | 7.64 |
| 6 | 0.2067 | 5.11 | 14.39 |

0.2266、平均床版面積は0.0431である。前述したように、交通量、床版面積は総サンプル数32,902個の中に含まれる最大値に対して基準化した値を示している。つぎに、以上のようにして再定義したデータベースに対して、指数ハザード関数を推定するとともに式(34)を用いて期待ハザード率 $E[\theta_i]$ を求めた。その結果を表-3に示している。さらに、当該レーティングにはじめて到達した時点から、劣化が進展して次のレーティングに進むまでのレーティング期待寿命は式(30)で表される。そこで、26,748個のサンプルに対してレーティング期待寿命 RMD_i^k を求め、全サンプルに対して平均値 $E[RMD_i^k]$ を求めた。その結果を表-3に併記している。さらに、表-3には数え上げにより求めた各レーティング期待寿命 $E[\overline{RMD}_i^k]$ も併記している。レーティング期待寿命 $E[\overline{RMD}_i^k]$ は、数え上げにより求めた推移確率(36)を用いれば

$$E[\overline{RMD}_i^k] = 2\pi_{iJ}(2) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=i}^{J-1} (2l+2) \cdot \pi_{im}(2l)\pi_{mJ}(2) - \sum_{m=i+1}^{J-1} E[\overline{RMD}_m^k] \quad (37)$$

と定義できる。ただし、 $\pi_{ij}(2l)$ は数え上げにより求めた推移確率行列を l 乗することにより求めた $2l$ 年間の推移確率を示している。上式の右辺第1項、第2項の和は i から J に至る期待経過年数を表す。また、第3項は $i+1$ から $J-1$ までのレーティング期待寿命 \overline{RMD}_i^k の和であり、 $i+1$ から J に至る期待経過年数を意味する。すなわち、健全度 i のレーティング期待寿命 $E[\overline{RMD}_i^k]$ は、健全度 i から健全度 J までに到達するまでの期待経過年数から、健全度 $i+1$ から健全度 J までに到達するまでの期待経過年数を差し引いた値として定義される。

本実証分析で用いたデータベースは極めて多くのサンプルを有しており、劣化が進んでいない状態(健全度が1~3)におけるレーティング期待寿命は、本研究で提案した推定方法を用いた場合と数え上げ法に基づく場合の双方でそれほど大きな違いはない。しかし、劣化が進んだ状態(健全度4~6)ではレーティング期待寿命が大きく異なっている。さらに、平均化操作によ

表-4 推定結果 (推移確率行列)

| 健全度 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.5408 | 0.3485 | 0.0984 | 0.0116 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2 | 0 | 0.5939 | 0.3409 | 0.0606 | 0.0044 | 0.0002 | 0.0000 |
| 3 | 0 | 0 | 0.7185 | 0.2525 | 0.0273 | 0.0015 | 0.0002 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.8109 | 0.1731 | 0.0139 | 0.0021 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.8410 | 0.1295 | 0.0295 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.6614 | 0.3386 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

表-5 数え上げによる推移確率行列

| 健全度 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.5382 | 0.3929 | 0.0595 | 0.0070 | 0.0018 | 0.0006 | 0.0000 |
| 2 | 0 | 0.6235 | 0.3272 | 0.0463 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0002 |
| 3 | 0 | 0 | 0.7203 | 0.2557 | 0.0222 | 0.0018 | 0.0000 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.8046 | 0.1800 | 0.0126 | 0.0028 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.8413 | 0.1040 | 0.0547 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.8610 | 0.1390 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

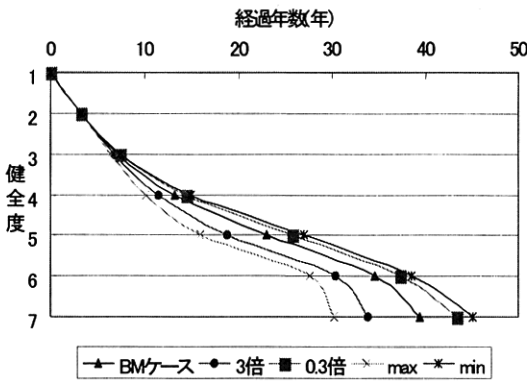


図-4 劣化期待値パス (交通量の変化)

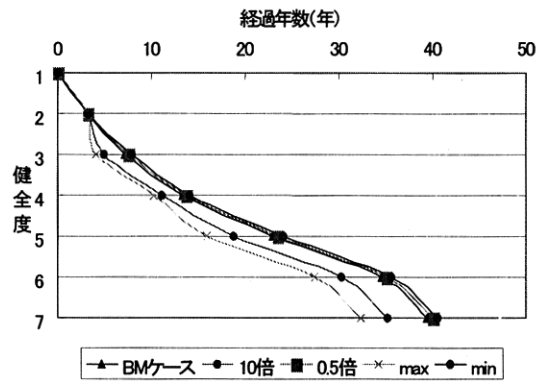


図-5 劣化期待値パス (床版面積の変化)

り求めたマルコフ推移確率行列を表-4に示している。また、数え上げ法によって求めたマルコフ推移確率行列を表-5に示している。健全度指標が大きくなれば、1) サンプル数が相対的に少なくなること、2) サンプル属性による推移確率の差異が大きくなること等により、平均化操作で求めた推移確率と数え上げ法によって求めた推移確率の差異が大きくなっている。

数え上げ法に基づく場合、交通量や床版面積の違いがマルコフ推移確率に及ぼす影響を分析できない。一方、本研究で提案した方法によれば、交通量や床版面積の違いが劣化速度に及ぼす影響をモデル化できる。そこで、交通量や床版面積を変化させることにより、劣化速度がどのように変化するかを分析しよう。マルコフ推移確率行列に対して平均的な劣化の進展を表す劣化期待値パスを定義する。期待値パスは、ある健全度か

らレーティング期待寿命 RMD_k^t を経ると次の健全度に推移するように、平均的な劣化の進展過程を描いたグラフを意味する。図-4には交通量をサンプル平均交通量0.2266、床版面積をサンプル平均面積0.0431に設定したベンチマークケース (以下、BMケースと表す) における劣化期待値パスを示している。同図では、初期時点から一定の経過年数を経るごとに健全度が悪化するような劣化過程が描かれている。劣化期待値パスは、健全度が1ランク推移するのに要する経過年数がそれぞれの健全度におけるレーティング期待寿命に一致するような劣化過程を表現している。同図に示すように、劣化期待値パスは経過年数に対して必ずしも上方に凸に形状を示していない。このことは健全度が離散的な状態変数として定義される指標であり、基数的な尺度として連続的に表現される指標ではない点に起

因する。健全度を判定する基準が変更されれば、当然のことながら劣化期待値パスの形状は異なる。

図-4には、BM ケース (交通量0.2266) に対して利用交通量を、a) 最小 (交通量0.0) にした場合、b) 0.3 倍にした場合、c) 3 倍にした場合、d) 最大 (交通量1.0) にした場合における劣化期待値パスも示している。同図に示すように、床版の劣化が進んでいない場合 (健全度が1~3の場合) には、交通量の多寡は床版の劣化に大きな影響を及ぼさない。しかし、一度劣化が進展すれば、交通量が多くなるほど劣化の進展がより顕著に現れる。一方、図-5は、BM ケース (平均交通量0.2266, 平均床版面積0.0431) に対して、床版面積を変化させることにより、劣化速度がどのように変化するかを分析した結果を示している。同図に示すように、床版面積が大きいほど、劣化の進展が早いことが理解できる。交通量の場合と異なり、劣化がそれほど進展していない健全度2の段階において、すでに床版面積の大小が劣化期待値パスに影響を及ぼしている。

(3) サンプル数と推定精度

本実証分析で用いたデータベース (以下、原データベースと呼ぶ) は32,902個のサンプルを含む充実した内容になっている。しかし、多くの橋梁アセットマネジメントの現場では、それほど十分な目視検査サンプルを獲得できない場合が少なくない。この場合、どの程度のサンプル数を確保すれば、十分な推定結果が得られるかが問題となる。当然のことながら、指数ハザードモデルの推定精度を議論するためには、マネジメントの対象とする橋梁に関するデータに基づいた分析が不可欠である。ここでは、1つの思考実験として、本研究で用いたデータベースの中から、データをランダムサンプリングしたデータベースを人為的に再構成し、サンプル数の多寡が指数ハザード関数の推定結果に及ぼす影響を分析することとする。これにより、NY市のデータベースの場合において、どの程度のサンプル数があれば原データベースと同様の推定結果が得られるかを明らかにすることができる。いま、原データベースに基づいて推定した指数ハザード関数のパラメータ最尤推定値を $\hat{\beta}$ と表そう。さらに、抽出データベース*t*に基づいて推定した最尤推定値を $\hat{\beta}^t$ と表そう。原データベースと抽出データベースに基づいて推定した指数ハザード関数は次式で表される。

$$\hat{\theta}_i^k = \hat{\beta}_{i,1} + \hat{\beta}_{i,2}x_2^k + \hat{\beta}_{i,3}x_3^k \quad (38a)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, n)$$

$$\hat{\theta}_i^{k,t} = \hat{\beta}_{i,1}^t + \hat{\beta}_{i,2}^t x_2^k + \hat{\beta}_{i,3}^t x_3^k \quad (38b)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = n+1, \dots, n+n')$$

ただし、 x_2^k, x_3^k ($k = 1, \dots, n$), x_2^k, x_3^k ($k = n+1, \dots, n+n'$) は、それぞれ原データベース、抽出データベースのサンプルデータを、 n, n' はそれぞれのデータベースのサンプル数である。ここで、2つのデータベースをプールした新しいデータベースを定義し、サンプル k ($k = 1, \dots, n+n'$) に対して指数ハザード関数

$$\hat{\theta}_i^k = (\hat{\beta}_{i,1} + \delta^k \hat{r}_{i,1}) + (\hat{\beta}_{i,2} + \delta^k \hat{r}_{i,2})x_2^k + (\hat{\beta}_{i,3} + \delta^k \hat{r}_{i,3})x_3^k \quad (39)$$

を定義しよう。ただし、

$$\begin{cases} \hat{r}_{i,1} = \hat{\beta}_{i,1}^t - \hat{\beta}_{i,1} \\ \hat{r}_{i,2} = \hat{\beta}_{i,2}^t - \hat{\beta}_{i,2} \\ \hat{r}_{i,3} = \hat{\beta}_{i,3}^t - \hat{\beta}_{i,3} \end{cases} \quad (40)$$

である。 δ^k ($k = 1, \dots, n+n'$) はダミー変数であり

$$\delta^k = \begin{cases} 0 & k = 1, \dots, n \\ 1 & k = n+1, \dots, n+n' \end{cases} \quad (41)$$

と表せる。ここで、原データベースに基づいて推定した指数ハザードモデルと、抽出データベースに基づいて推定した指数ハザードモデルが一致するかどうかを分析するために、推定値間 $\hat{\beta}, \hat{\beta}^t$ の同一性を検定するためのChowテスト¹⁷⁾を利用しよう。すなわち、指数ハザードモデルの一致性を検定するための帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0: \hat{r}_{i,m} = \text{and } 0 \quad (i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, 3) \\ H_1: \hat{r}_{i,m} \neq \text{or } 0 \quad (i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (42)$$

と定義する。帰無仮説 H_0 はすべての $i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, 3$ に対して、 $\hat{r}_{i,m} = 0$ が同時に成立することを要求している。これに対して、対立仮説 H_1 は任意の $i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, 3$ に対して1つでも $\hat{r}_{i,m} \neq 0$ が成立することを意味する。抽出データベースに基づいた推定結果が、原データベースの推定結果と一致するという帰無仮説 H_0 を対立仮説 H_1 に対して検定するための尤度比検定統計量は

$$\xi = 2 \left\{ \ln[\mathcal{L}(\hat{\beta}, \hat{r})] - \ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})] \right\} \quad (43)$$

$$\ln[\mathcal{L}(\hat{\beta}, \hat{r})] = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^7 \sum_{k=1}^{n+n'} \delta_{ij}^k \ln \left[\pi_{ij}(\bar{Z}^k, \bar{x}^k; \hat{\beta}, \hat{r}) \right]$$

$$\ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})] = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^7 \sum_{k=1}^{n+n'} \delta_{ij}^k \ln \left[\pi_{ij}(\bar{Z}^k, \bar{x}^k; \hat{\beta}) \right]$$

と表せる。ここに、 $\hat{r} = (\hat{r}_{1,1}, \dots, \hat{r}_{6,3})$ である。また、 $\ln[\mathcal{L}(\hat{\beta}, \hat{r})]$ は制約がない (帰無仮説 H_0 の制約がない) 場合の尤度を、 $\ln[\mathcal{L}(\hat{\beta})]$ は帰無仮説 H_0 の下での最尤推定値を表す。なお、表-2に示すように、説明変数によっては指数ハザードモデルの推定値が $\hat{\beta}_{i,m} = 0$ となっているパラメータが存在する。すなわち、指数ハザードモデル(39)において、 $\hat{\beta}_{i,m} \neq 0$ であるパラメータは13個存在する。

異なるデータベースに対する Chow テストの結果を相互に比較するために、尤度比検定統計量の自由度を統一しておく必要がある。そこで、本研究では原データベースを用いて推定した指数ハザードモデルにおいて $\hat{\beta}_{i,m} = 0$ となるパラメータに対しては $\hat{\beta}_{i,m} = 0$ を仮定する。すなわち、ハザードモデル (39) の推定に当たっては、 $\hat{r}_{i,m} = 0$ という制約を設けることとする。したがって、尤度比検定統計量の自由度は原データベースに基づいて推定した指数ハザードモデルにおいて $\hat{\beta}_{i,m} \neq 0$ となるパラメータ数である 13 となる。その結果、検定統計量 ξ が棄却域 $\xi \geq \chi^2_{(100-\alpha)}(13)$ に入れば、有意水準 $\alpha\%$ で帰無仮説 H_0 を棄却できる。ただし、 $\chi^2_{(100-\alpha)}(13)$ は自由度 13 の χ^2 分布を表す。帰無仮説 H_0 が棄却された場合、抽出データベースに基づいて推定した指数ハザードモデルは、原データベースに基づいて推定した指数ハザードモデルと一致しないと判断できる。いま、原データベースから抽出するサンプル数を固定しよう。抽出サンプル数として、1000 個から 500 個単位で 4000 個まで増加させた 7 通りのケースを設定した。その上で、抽出サンプル数を所与とした各ケースに対して、原データベースからサンプルをランダム抽出することにより、合計 1,000 通りの抽出データベースを作成した。したがって、7 ケース全体では 7,000 個の抽出データベースが作成されたことになる。つぎに、抽出サンプル数を固定した各ケースにおける 1000 個の抽出データベースのそれぞれに対して指数ハザードモデルを作成し、検定統計量 ξ (式 (43) 参照) を求めた。その上で、1000 個の抽出データベースのそれぞれに対して求めた検定統計量 ξ に対して、有意水準 1% で仮説 H_0 が棄却されるかを分析した。いま、抽出データベースに含まれるサンプル数 w に対して仮説 H_0 が棄却される割合 $\rho(w)$ を

$$\rho(w) = \frac{\text{仮説 } H_0 \text{ が棄却されるデータベース数}}{\text{総データベース数}} \quad (44)$$

と定義する。図-6 は抽出データベースのサンプル数 w と仮説 H_0 の棄却率 $\rho(w)$ の関係を示している。その結果、抽出データベースに含まれるサンプル数が多くなるとつれて、仮説 H_0 が棄却される割合が減少することが読みとれる。本実証分析に関する限り、抽出サンプル数が 1000 個のケースでは 25.4% 以上の抽出データベースにおいて、抽出サンプル数 1500 個のケースでは 9.6% 以上の抽出データベースにおいて仮説 H_0 が棄却されている。すなわち、1,500 個程度のサンプル数で指数ハザードモデルを推定した場合、確率 0.1 程度で原データベースの推定結果とは異なる推定結果が得られる危険性が存在する。仮説 H_0 の棄却率を 5% 以下に抑えるためには、少なくとも 2,000 個以上程度のサンプル数を確保することが必要となる。以上の知見は本研究で用いたデータベースに対してのみ成立する事項ではあるが、本デー

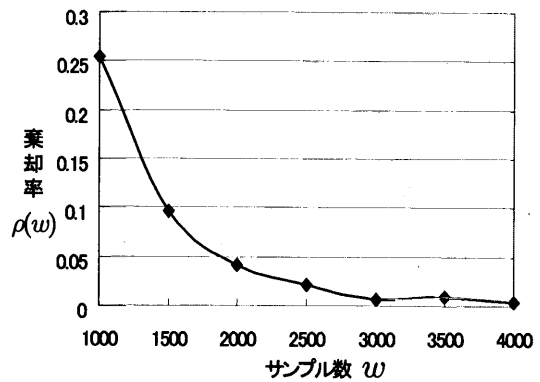


図-6 サンプル数と推定精度

タベースの場合、原データベースに基づく場合と同等程度の推定精度を確保するためには、目視点検の実績を相当程度 (2,000 サンプル以上) に蓄積することが必要であることが理解できる。

6. おわりに

本研究では橋梁部材の統計的劣化予測のためのマルコフ推移確率を推定する方法論を提案した。その際、橋梁部材の健全度を複数の健全度で表すとともに、健全度間の推移過程を指数ハザードモデルを用いて表現した。さらに、定期検査データに基づいて指数ハザードモデルを最尤推定する方法論を提案した。本研究で提案した方法論により、構造特性や使用環境、検査状況が異なる異なる検査データを用いて、それぞれの橋梁部材の劣化特性を非集計的に推定することが可能となる。本研究で提案した指数ハザードモデルにより、マルコフ推移確率を任意の時間間隔に対して時間整合的に推定することが可能となる。さらに、鋼橋を対象とした適用事例を通じて、本研究で提案したマルコフ推移確率推定法の有用性を実証的に検証した。本研究で提案した方法論は鋼橋以外にも幅広い土木構造物の劣化予測に適用が可能であり、今後実証的な適用研究を蓄積していく必要がある。しかし、本研究で提案した推定法に関して、以下の課題が残されている。第1に、現実の検査業務では目視点検等により健全度を判定するケースが少なくなく、健全度に判定誤差が含まれることは避けられない。この種の判定誤差を考慮しうる推定方法を開発することが必要である。第2に、本研究ではすべての橋梁部材サンプルに対して同一の構造を有するハザードモデルを適用した。しかし、ハザード関数にはサンプル固有の誤差が含まれる可能性がある。この

種のサンプル誤差に関しては、例えば mixture hazard model の適用を検討することが必要である。第3に、本研究では複数の時点における定期検査データが獲得できることを前提としている。現実には、1回の検査データのみが利用可能な場合が少なくない。このような場合でも、橋梁の供用が開始された時点に関するデータが利用可能であれば、マルコフ推移確率は推定可能である。たとえば、NY市の適用事例では、供用開始時点の健全度を1とし、供用開始時点から点検時点までの経過期間を点検間隔 Z と解釈すれば、本研究で提案した推定方法を用いることができる。このようにデータの利用可能性に制限がある場合を対象としたマルコフ推移確率の推定方法を開発することが必要である。第4に、今後検査データが蓄積されることが予想される。その際、新しい検査データに基づいて、ハザードモデルのパラメータをベイズ更新する方法論を開発することが必要である。

なお、本研究を遂行するに際し、NY市交通局 Bojidar Yanev 博士には、目視検査結果を提供して頂きました。ここに、記して感謝致します。

付録 数学的補足

1) 式(22)の導出過程 $\bar{\theta}_{m,j} = \theta_m - \theta_j$ と置く。

式(22)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-3} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_j Z - \sum_{m=1}^{j-2} \bar{\theta}_{m,j} z_m) \\
 &\quad \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-2} z_m} \exp(-\bar{\theta}_{j-1,j} z_{j-1}) dz_1 \cdots dz_{j-1} \\
 &= -\frac{1}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-3} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_{j-1} Z) \\
 &\quad \exp(-\sum_{m=i}^{j-2} \bar{\theta}_{m,j} z_m + \sum_{m=i}^{j-2} \bar{\theta}_{j-1,j} z_m) dz_1 \cdots dz_{j-2} \\
 &+ \frac{1}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-4} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_j Z) \\
 &\quad \exp(-\sum_{m=i}^{j-3} \bar{\theta}_{m,j} z_m) \int_0^{Z-\sum_{m=i}^{j-3} z_m} \exp(-\bar{\theta}_{j-2,j} z_{j-2}) \\
 &\quad dz_1 \cdots dz_{j-2}
 \end{aligned}$$

第1項を整理すると、

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-3} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_{j-1} Z) \\
 &\quad \exp(-\sum_{m=i}^{j-2} \bar{\theta}_{m,j-1} z_m) dz_1 \cdots dz_{j-2} \\
 &= -\frac{\theta_j}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-3} z_m} \prod_{m=1}^{j-2} \theta_m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\exp(-\theta_{j-1} Z - \sum_{m=i}^{j-2} \bar{\theta}_{m,j-1} z_m) dz_1 \cdots dz_{j-2} \\
 &= -\frac{\theta_{j-1}}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \pi_{ij-1}
 \end{aligned}$$

第2項を整理すると、

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{\bar{\theta}_{j-1,j} \bar{\theta}_{j-2,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-4} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_j Z) \\
 &\quad \exp(-\sum_{m=i}^{j-3} \bar{\theta}_{m,j} z_m) \left[\exp\{-\bar{\theta}_{j-2,j}(Z - \sum_{m=i}^{j-3} z_m)\} - 1 \right] \\
 &\quad dz_1 \cdots dz_{j-3} \\
 &= -\frac{\theta_{j-1} \theta_{j-2}}{\bar{\theta}_{j-1,j} \bar{\theta}_{j-2,j}} \pi_{ij-2} \\
 &+ \frac{1}{\bar{\theta}_{j-1,j} \bar{\theta}_{j-2,j}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{m=1}^{j-4} z_m} \prod_{m=1}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_j Z) \\
 &\quad \exp(-\sum_{m=i}^{j-3} \bar{\theta}_{m,j} z_m) dz_1 \cdots dz_{j-3}
 \end{aligned}$$

上記のように展開していくと、 π_{ij} は

$$\begin{aligned}
 \pi_{ij} &= -\frac{\theta_{j-1}}{\bar{\theta}_{j-1,j}} \pi_{ij-1} - \frac{\theta_{j-1} \theta_{j-2}}{\bar{\theta}_{j-1,j} \bar{\theta}_{j-2,j}} \pi_{ij-2} - \cdots \\
 &+ \prod_{m=i}^{j-1} \frac{1}{\bar{\theta}_{m,j}} \int_0^Z \prod_{m=i}^{j-1} \theta_m \exp(-\theta_j Z) \exp(-\bar{\theta}_{i,j} z_i) dz_i \\
 &= -\sum_{k=i+1}^{j-1} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \pi_{ik} \\
 &\quad - \prod_{m=i}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \{ \exp(-\theta_i Z) - \exp(-\theta_j Z) \} \\
 &= -\sum_{k=i+1}^{j-1} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \pi_{ik} \\
 &\quad - \prod_{m=i}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \pi_{ii} + \prod_{m=i}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \exp(-\theta_j Z) \\
 &= -\sum_{k=i}^{j-1} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \pi_{ik} + \prod_{m=i}^{j-1} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,j}} \exp(-\theta_j Z)
 \end{aligned}$$

いま、 π_{ij} ($i = 1, \dots, J-1, j = i, \dots, J-1$)は $\pi_{i,i}, \pi_{i,i+1}, \dots, \pi_{i,j-1}$ の線形結合になっており、上式は

$$\pi_i = -\pi_i \mathbf{A}_i + \mathbf{C}_i$$

と表せる。ただし、 $\pi_i = (\pi_{i,i}, \pi_{i,i+1}, \dots, \pi_{i,J-1})$ であり、 $(J-i) \times (J-i)$ 次行列 \mathbf{A}_i は

$$\begin{pmatrix}
 0 & \frac{\theta_i}{\bar{\theta}_{i,i+1}} & \frac{\theta_i \theta_{i+1}}{\bar{\theta}_{i,i+2} \bar{\theta}_{i+1,i+2}} & \cdots & \prod_{m=i}^{J-2} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,J-1}} \\
 0 & 0 & -\frac{\theta_i}{\bar{\theta}_{i+1,i+2}} & \cdots & \prod_{m=i+1}^{J-2} \frac{\theta_m}{\bar{\theta}_{m,J-1}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

と表せる。 $\alpha_i = i+p-1$, $\alpha_j = i+q-1$ と置けば、 \mathbf{A}_i

の (p, q) 成分は

$$A_i(p, q) = \begin{cases} \prod_{m=\alpha_i}^{\alpha_j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m, \alpha_j}} & p < q \text{ の時} \\ 0 & p \geq q \end{cases}$$

と表せる。 $(J-i)$ 次行ベクトル C_i の q 要素 $C_i(q)$ は

$$C_i(q) = \prod_{m=i}^{\alpha_j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m, \alpha_j}} \exp(-\theta_{\alpha_j} Z)$$

である。 $A_i + E$ の逆行列を B_i とすると、その (p, q) 成分は、次式が成立する。

$$B_i(p, q) = \begin{cases} \prod_{m=\alpha_i}^{\alpha_j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1, \alpha_i}} & p \leq q \text{ の時} \\ 0 & p > q \end{cases}$$

この時、 $\pi_i = C_i B_i$ と表現でき、その要素 π_{ij} は

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \sum_{l=1}^{J-i} C_i(l) B_i(l, j-i+1) \\ &= \sum_{l=1}^{j-i+1} \prod_{m=i}^{i-2+l} \frac{\theta_m}{\theta_{m, i-1+l}} \exp(-\theta_{i-1+l} Z) \\ &\quad \cdot \prod_{m=i-1+l}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1, i-1+l}} \\ &= \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m, k}} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1, k}} \exp(-\theta_k Z) \end{aligned}$$

2) 時間的整合性の証明 数学的帰納法を用いて、指数ハザードモデルを用いて導出したマルコフ推移確率行列が時間的整合性条件を満足することを示す。 $n=1$ の時は自明。 $n=k-1$ の時に $\Pi((k-1)Z) = \{\Pi(Z)\}^{k-1}$ が成立すると仮定する。このことは、 $\pi_{ii}(kZ) = \pi_{ii}((k-1)Z) \pi_{ii}(Z)$ 、 $\pi_{ij}(kZ) = \sum_{h=i}^j \pi_{ih}((k-1)Z) \pi_{hj}(Z)$ が成立する (式展開は省略) ことより明らかである。

参考文献

- 1) 貝戸清之, 阿部允, 藤野陽三: 実測データに基づく構造物の劣化予測, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.29-38, 2003.
- 2) 鍵本広之, 佐藤道生, 川村満紀: アルカリシリカ反応により劣化した施設の劣化度評価と細孔溶液分析による劣化進

行の予測, 土木学会論文集, No.641/V-46, pp.241-251, 2002.

- 3) 小林孝一, 宮川豊章: 分極抵抗法を用いた鉄筋の腐食速度評価に関する研究, 土木学会論文集, No.669/V-50, pp.173-186, 2001.
- 4) 堤知明, 白井伸一, 安田登, 松島学: 塩害劣化に関する影響要因の実データに基づく定量評価, 土木学会論文集, No.544/V-32, pp.33-41, 1996.
- 5) 大野俊夫, 魚本健人: コンクリートの収縮ひび割れ発生予測に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.662/V-49, pp.29-44, 2000.
- 6) 元路寛, 関博, 高木言芳: 中性化したコンクリートにおける乾湿繰返し作用による鉄筋腐食に関する研究, 土木学会論文集, No.697/V-54, pp.1-11, 2002.
- 7) 佐伯竜彦, 大即信明, 長瀧重義: 中性化によるモルタル中の鉄筋腐食の定量的評価, 土木学会論文集, No.532/V-30, pp.55-66, 1996.
- 8) Lee, T. C., Judge, G.G., and Zellner, A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- 9) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 10) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 11) Shin, H.C., and Madanat, S.M.: Development of a stochastic model of pavement distress initiation, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp. 61-67, 2003.
- 12) Tobin, J.: Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, 26, pp.24-36, 1958.
- 13) Amemiya, T. and Boskin, M.: Regression analysis when the dependent variable is truncated lognormal, with an application to the determinants of the duration of welfare dependency, *International Economic Review*, Vol.15, p. 485, 1974.
- 14) 磯田和男, 大野豊: 数値計算ハンドブック, オーム社, 1990.
- 15) State of New York, Department of Transportation: *Bridge Inspection Manual*, 1997.
- 16) (財) 海洋架橋・橋梁調査会: 道路橋マネジメントの手引き, 2005.
- 17) 森棟公夫: 計量経済学, 東洋経済新報社, 1999.

(2004. 10. 5 受付)

ESTIMATING MARKOVIAN TRANSITION PROBABILITIES FOR BRIDGE DETERIORATION FORECASTING

Yoshitane TSUDA, Kiyoyuki KAITO, Kazuya AOKI and Kiyoshi KOBAYASHI

In this paper, a methodology to estimate the Markovian transition probability model is presented to forecast the deterioration process of bridge components. The deterioration states of the bridge components are categorized into several ranks, and their deterioration processes are characterized by hazard models. The Markovian transition probabilities between the deterioration states which are defined for the fixed intervals between the inspection points in time, are described by the exponential hazard models. The applicability of the estimation methodology presented in this paper is investigated by the empirical data set of steel bridges in New York city.