

マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定

貝戸清之¹・小林潔司²

¹正会員 大阪大学大学院 工学研究科 グローバル若手研究者フロンティア研究拠点 (〒565-0871 吹田市山田丘2-1)

E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

²フェロー会員 京都大学経営大学院経営管理講座 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail:kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

橋梁アセットマネジメントでは、目視検査結果を用いた統計的劣化予測に基づいてライフサイクル費用を算定する場合が多い。しかしながら、大半の施設管理者においてはデータの蓄積が十分ではなく、このことが統計的劣化予測手法の実用化の弊害となっている。そこで、本研究では予測の初期段階では専門技術者の先験情報により劣化予測結果を与え、目視検査データの蓄積とともに逐次予測結果を更新することが可能な方法論を提案する。具体的には、著者らが開発した統計的劣化予測手法であるマルコフ劣化ハザードモデルをマルコフ連鎖モンテカルロ法に基づくベイズ推定により更新する方法を提案する。さらに、実橋RC床版に対する目視検査データへの適用を通して、本手法の有効性を実証的に検証した。

Key Words : Bayesian estimation, Markov chain Monte Carlo method, Gibbs sampling, statistical deterioration prediction, asset management

1. はじめに

土木施設のアセットマネジメントでは、ライフサイクル費用評価に基づく維持管理戦略の決定が重要な課題となる^{1),2)}。ライフサイクル費用は、対象とする土木施設の生涯を通して発生する全ての費用の集計結果である。ライフサイクル費用評価の方法として、割引現在価値の最小化³⁾、年平均費用の最小化^{1),4)}等が提案されている。このようにライフサイクル費用の考え方に違いはあるものの、基本的には目視検査データ等に基づいて土木施設の劣化予測を行い、ライフサイクル費用を最小にするような補修政策と補修タイミングが検討されることになる。

劣化予測には、1) 管理する土木施設群全体の平均的な劣化を対象とする場合と、2) 個別の施設における具体的な損傷劣化を対象とする場合とがある。前者に対しては膨大な劣化情報から劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化する統計的手法が、後者に対しては劣化メカニズムを解明して劣化過程を直接的にモデル化する物理的手法が、採用されることが多い。また、現実のアセットマネジメントの実施事例を俯瞰すると、はじめに土木施設全体の劣化特性を把握して戦略レベルの意思決定(予防保全, 事後保全の選択等)を行い、その上で個別施設の具体的な維持管理計画という戦術レベルの意思決定を行うことが一般的であると考えられる。本研究では、統計的劣化予測モデルをとりあげ、この種のモデルは戦略レベルの意思決定問題において適用されることが多い。

統計的手法によって劣化を予測する際には、劣化情報としてどのような検査データを用いるかが重要である。土木施設全体の劣化傾向を捉えるためには、対象とする施設全体に対して包括的に実施される検査結果を利用することが望ましい。また、実用的には既存の検査の枠組みを変えずに獲得できるデータに基づいて劣化予測手法を構築していくことが有効であろう。このような観点から考えると、現状では目視検査データが有効である。目視検査では、土木施設の健全度を数値やアルファベットによる多段階のレーティングで評価する施設管理者が多く、検査結果としてそれらのレーティングが保存されている。

著者らはこれまでに目視検査データに基づく統計的劣化予測手法⁵⁾⁻⁷⁾を構築し、実データを通じた検証を重ねてそれらの有効性を確認してきた。しかしながら同時に、高い予測精度を確保するためには、数千から数万の目視検査データが必要となることも明らかにした^{6),7)}。この点に関して、大半の施設管理者が十分なデータを蓄積しているとは言い難く、統計的手法の実用化段階で弊害となることが予想できる。そこで、統計的手法の実用性をより高めるためには、目視検査データの蓄積が不十分な初期段階であっても、専門技術者の経験や知識・ノウハウといった先験情報と限定的な目視検査データを融合した形で予測結果を与え、データの蓄積とともに逐次予測結果を更新することが可能な方法論を構築しておく必要がある。

以上を踏まえて、本研究ではベイズ推定に基づく逐次更新型の劣化予測手法を提案する。具体的には、著者

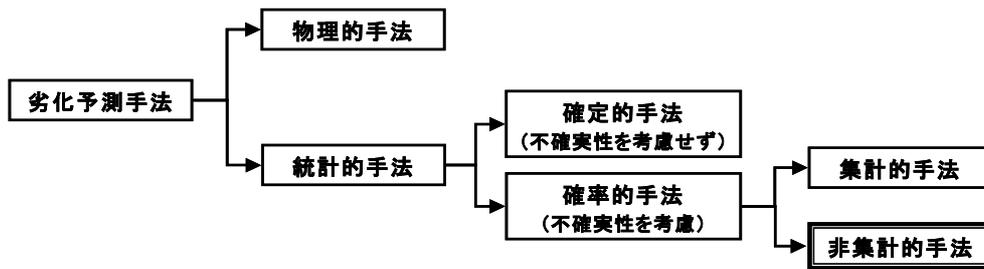


図-1 統計的劣化予測手法の体系

らが開発した多段階指数劣化ハザードモデル⁷⁾を用いたマルコフ推移確率推定モデル（以下、マルコフ劣化ハザードモデルと呼ぶ）に対して、マルコフ連鎖モンテカルロ法^{8),9)} (Markov Chain Monte Carlo method, 以下MCMC法と略記する)を援用したベイズ推定法を構築する。マルコフ劣化ハザードモデルは、構造特性、環境条件、目視検査の間隔等、施設ごとに有するデータの異質性を非集計的に扱う点に特徴があり、従来手法と比較して高精度の劣化予測を行うことが可能である。以下、2. で既往の研究のレビューを踏まえて本研究の位置づけを明確にする。3. でマルコフ劣化ハザードモデルによるマルコフ推移確率の推定手法の概要を述べる。4. でMCMC法に基づくベイズ推定法を提案し、5. で実橋RC床版の目視検査データを用いて提案手法の有効性を実証的に検証する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 統計的劣化予測手法

本研究では、土木施設の健全度を多段階のレーティング（離散値）で評価した目視検査データを扱う。そのような目視検査データに基づく統計的劣化予測手法はこれまでに数多く提案されており、体系化すると図-1の通りに分類することができる。すなわち、劣化過程の不確実性をモデル化に考慮しているか否か、さらには不確実性を考慮した場合において推定方法が集計的であるか、非集計的であるか、である。ここで、集計的手法とは着目する土木施設群の全ての目視検査データを集計して何らかの平均化操作によりマクロ的な劣化を予測する手法を指す。一方、非集計的手法は、個別の土木施設に対する目視検査データからミクロ的な劣化を予測する手法を指す。非集計的手法でマクロ的な劣化予測を行う場合には、ミクロ的な劣化予測結果を集計して平均化操作を行うことになる。

不確実性を考慮しない確定論的手法の事例としては、Yanev, B.¹⁰⁾、貝戸ら⁵⁾の研究がある。Yanev, B.は、ニューヨーク市（以下、NY市と略記する）の橋梁対

する目視検査データ（7段階のレーティング評価）を橋梁の経年ごとにプロットし、一定間隔の経年区間における平均レーティングを算出することで橋梁の劣化曲線を示した。しかし、この手法では橋梁の過去における完全な検査履歴を把握していなければ、劣化予測結果が実際の劣化よりも緩やかになってしまうことを指摘している。この適用限界に関しては、その他の文献においても同様の報告がなされている¹¹⁾。一方、貝戸ら⁵⁾は同一橋梁に対する2回の目視検査データから得られる劣化速度に着目して、橋梁の平均劣化曲線を算出する手法を提案している。この手法の利点は、過去の検査履歴が利用できない場合であっても2回の目視検査データが得られていれば、前述の適用限界を克服した劣化予測が可能なる点にある。

不確実性を考慮した確率論的手法ではマルコフ連鎖モデルを用いたものが代表的である。マルコフ連鎖モデルでは、レーティングの遷移をマルコフ推移確率で表現し、これらを要素とするマルコフ推移確率行列を用いて劣化予測モデルを構築する。集計的にマルコフ推移確率を推定する一般的な方法は、サンプルの単純数え上げ¹²⁾⁻¹⁴⁾である。例えば、武山ら¹²⁾は、舗装の供用性指標として用いられていたPSI（連続値）を5段階の離散値に定義し直した上で、交通量別にマルコフ推移確率を推定している。しかしながら、これらの研究では目視検査間隔が全て均一であるという理想的な状態を暗に想定している。これに対して、杉崎ら⁶⁾は検査間隔の不均一性を考慮したマルコフ推移確率の推定方法を提案し、実データを用いた比較検討から検査間隔の不均一性を単純に無視できないことを示している。一方、非集計的手法としては、津田ら⁷⁾、青木ら¹⁵⁾の研究がある。津田らは、劣化過程を多段階の指数ハザードモデルで表現し、マルコフ推移確率を算出する方法を提案している。この手法の利点は、各施設の固有の構造特性、環境条件や検査間隔の不均一性を考慮した、土木施設個々の劣化曲線を算出できる点にある。さらに、個々の予測結果に対して平均化処理を施すことにより、対象とする施設全体の平均的な劣化予測結果を

得ることができる。しかしながら、非集計的手法の実用上の課題として、予測精度を確保するためには2,000サンプル程度のデータ蓄積が必要となることを津田らは指摘している。また、青木らは、劣化過程が過去の履歴に依存するケースに着目して、多段階ワイブル劣化ハザードモデルを用いた時間依存型の劣化予測手法を構築し、トンネル照明の劣化予測問題への適用を試みている。このモデルにおいても推定には津田ら⁷⁾と同様に最尤法を適用していることから、一定程度のサンプル数を確保しておく必要がある。

統計的手法は、物理的手法とは異なり劣化メカニズムを解明することなく、劣化過程の背後に存在する規則性を統計処理によりモデル化する。そのため、統計的手法はマクロなレベルでの平均的な劣化特性を議論するために有用であるものの、予測精度を確保するためには、数千、数万という膨大な目視検査データの蓄積が前提となる。この問題点を克服するために、本研究では目視検査データの蓄積が十分でない初期段階においては専門技術者の先験情報と限定的な目視検査データを融合した形で予測結果を与え、データの蓄積とともに逐次予測結果を更新可能なベイズ推定に基づく方法論を構築する。特に、統計的手法の中で最も先進的で、その他の手法と比べて少ないサンプル数で高い推定精度を確保することが可能な非集計的手法に焦点を当てて具体的な方法論を述べる。

(2) ベイズ推定の必要性

ベイズ統計学は、対象とする事象が生起する確率を推定するにあたり、専門技術者が事前に保有している情報、知識、経験等を活用し、主観的に確率を決定する立場に立つ。ベイズ推定法では、事前情報を積極的に活用できるため、標本が少ない場合にも未知パラメータの推定を行うことが可能であり、より多くの未知パラメータをモデルに採用することも可能となる。また、標本の追加に対しても容易にモデルを更新できるという優れた特徴を持っている。

現実のアセットマネジメントでは、過去の検査データの蓄積が十分ではなく、技術者の経験的判断に基づいて、劣化予測モデルを暫定的に設定せざるを得ない場合が少なくない。また、施設によっては、新しい技術や新製品の導入、または基準類の改定により、過去の劣化過程に関する情報が全く蓄積されていない場合もあろう。このような場合、個々の類似の施設を対象として作成した劣化予測モデルを、初期モデルとして暫定的に用いることも1つの方法である。あるいは、技術者の経験情報に基づいて、主観的に劣化予測モデルを設定せざるを得ない場合もあろう。いずれの場合にせよ、目視検査データが蓄積されていない段階で作成

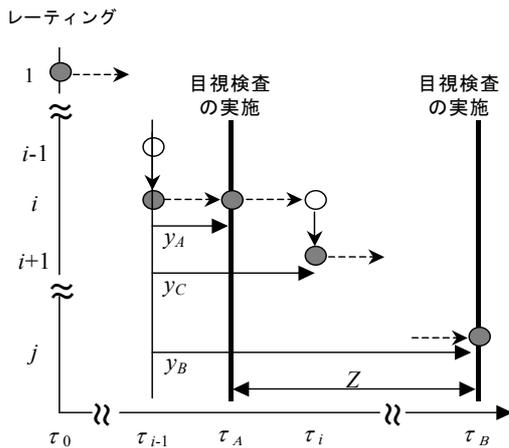
した初期モデルはあくまでも暫定的モデルであり、新しい検査データが利用可能になった段階で劣化予測モデルを逐次更新していく必要がある。ベイズ推定法を用いることにより、先験的な事前情報の有効利用、追加的データに基づいたモデルの更新を統一的な枠組みの中で実施することが可能となる。さらに、データが蓄積されるに従って、初期モデルを推定する際に用いた経験的判断の影響力が次第に薄れていき、長期的には客観的データに基づいて推定した劣化予測モデルに収束するという望ましい特性がある。また、このようなモデルの更新過程において、モデルの信頼性を統一的に評価するための分析的枠組みを提供するという利点を有している。

したがって、このような特性を有するベイズ統計学には、長い研究の歴史があり、土木工学の分野でもいくつかの適用事例¹⁶⁾がある。本研究で取り上げるハザードモデルへのベイズ統計学の援用に関しても、Guttman & Sinha¹⁷⁾による先駆的研究以降、生存時間解析モデルに関するベイズ統計学が発展を遂げた^{18),19)}。さらに、近年では、関数形、確率分布形を特定化しないセミ(非)パラメトリック・ハザードモデル²⁰⁾に関する研究も発展しており、これら最新の研究成果はベイズハザードモデルとして体系化されている²¹⁾。しかしながら、のちに4. で述べるように、ハザードモデルにベイズ推定法を適用する場合、ハザードモデルのパラメータに関する事前分布と事後分布の間に共役性が成立しない(両者が同一の分布族にならない)。そのため、事後分布を解析的に求めることが不可能であり、実用化の障害となっていた。近年になりMCMC法^{8),9)}の発展により、ハザードモデルを効率的にベイズ推定することが可能になった。津田ら²²⁾は劣化状態が故障の有無という2値状態で表されるような施設や機器を対象としたワイブル劣化ハザードモデル²³⁾をベイズ推定法によって推定する方法を開発した。本研究では、これを拡張し、マルコフ劣化ハザードモデルに基づいてマルコフ推移確率をベイズ推定する方法論を提案する。

3. マルコフ劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提

土木施設の劣化を予測するためには、施設の劣化状態に関する時系列データを蓄積する必要がある。いま、ある施設の劣化状態が目視検査データとして得られ、その履歴が図-2に示すように与えられたとする。同図は、施設が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。現実には、施設の劣化過程には不確実性が含まれ、しかも劣化状態は時間軸上の限られた時刻で実施される目視検査を通



注) ある土木施設の劣化過程を示している。カレンダー時刻 τ_{i-1} にレーティングが $i-1$ から i に変化した場合、検査が行われる時刻 τ_A 、 τ_B は時刻 τ_{i-1} を起点とするサンプル時点 y_A 、 y_B と対応する。図中の劣化サンプルパスの場合、時点 y_C にレーティングが1つ進行する。定期検査サンプリングの場合、時刻 τ_{i-1} を観測できないため、サンプル時間軸上の時点 y_A 、 y_B 、 y_C も観測できない。しかし、検査間隔 $z = y_B - y_A$ であるという情報を用いることができる。

図-2 劣化過程のモデル化

じてのみ知ることができる。図中、時刻 τ はカレンダー上の実時刻（以下、時刻と呼ぶ）を表す。時刻 τ_0 で施設の使用が開始された直後から劣化が始まる。施設の劣化状態が J 個のレーティングで記述される場合を考えよう。施設の劣化状態を表すレーティングを状態変数 i ($i = 1, 2, \dots, J$)で表現する。施設が最も健全な（劣化が進展していない）状態を $i = 1$ で表し、状態変数 i の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。 $i = J$ の場合、当該施設が使用限界に到達していることを示す。

施設に対して定期的に目視検査が実施され、施設の劣化状態に関するレーティングが獲得できる場合を考える。ここでは、時間軸上の2つの時刻 τ_A と τ_B において定期検査が実施される。時刻 τ_A で観測された当該部材の健全度が状態変数 $h(\tau_A)$ として表されているものとしよう。状態変数 $h(\tau_A)$ はカレンダー上の実時刻 τ_A での目視検査結果であり、このときのレーティング評価が i ($i = 1, 2, \dots, J$)であれば、 $h(\tau_A) = i$ となる。このとき、レーティング i から j への推移状態を表すマルコフ推移確率は、時刻 τ_A で評価された健全度 $h(\tau_A) = i$ を与件とし、将来時点において健全度 $h(\tau_B) = j$ が生起する条件付確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = j \mid h(\tau_A) = i] = p_{ij} \quad (1)$$

と表すことができる。マルコフ推移確率行列は、全て

のレーティングの組み合わせに対して算出したマルコフ推移確率を要素とする行列である。

マルコフ推移確率の推定方法に関する既往の研究は、推移確率そのものを推定対象として、2時点間における状態推移の件数というサンプルの数え上げデータに基づいてマルコフ推移確率を推定する事例が多い。たとえば、数え上げデータは

$$\bar{p}_{ij} = \frac{h(\tau_A) = i \text{かつ} h(\tau_B) = j \text{である件数}}{h(\tau_A) = i \text{である件数}} \quad (2)$$

により定義できる。このような集計的なマルコフ推移確率の推定法は取り扱いが簡便であるが、個々の施設の構造特性や環境条件といった固有の情報を反映することはできない。また、限られた検査データを有効に活用するためにも、データによる検査間隔の差異を考慮しながら、すべての検査データを活用してマルコフ推移確率を推定することが望ましい。そこで、次節では、マルコフ劣化ハザードモデルを用いて、マルコフ推移確率を推定する方法を説明する。

(2) マルコフ劣化ハザードモデルの概要

3. (1) で示した劣化過程を、マルコフ劣化ハザードモデルを用いて定式化しよう。読者の便宜を図るために概要を述べるに止めるが、ハザードモデルの詳細については参考文献^{24), 25)}を参照して欲しい。

図-2の例を再び取り上げる。時間軸上の離散時刻 τ_i ($i = 1, \dots, J-1$)において、劣化状態が i から $i+1$ に進展しているとする。以下、時刻 τ_i は「劣化状態が i から $i+1$ へ推移する時刻」を表す。ここで、カレンダー時刻 τ_{i-1} を初期時点 $y_i = 0$ とする時間軸（以下、サンプル時間軸と呼ぶ）を導入する。サンプル時間軸上の時刻を、以下「時点」と呼び、カレンダー時間軸上の「時刻」とは区別する。図-2の例では、検査時刻 τ_A 、 τ_B は、サンプル時間軸上の時点 y_A 、 y_B に該当している。当然のことながら、 $y_A = \tau_A - \tau_{i-1}$ 、 $y_B = \tau_B - \tau_{i-1}$ が成立する。なお、定期検査は検査実施時点での断片的な劣化情報を獲得しているにすぎず、劣化状態 i が始まったカレンダー時刻 τ_{i-1} に関する情報を獲得することはできない。したがって、サンプル時間軸上の時点 y_A 、 y_B も正確に把握できない。目視検査データのように断片的な劣化情報を用いる場合には、このような観測情報の切断の問題^{26), 27)}に留意する必要がある。ここでは、記述の便宜上、当面サンプル時点情報が既知であると仮定して議論を進めるが、このことは劣化過程がマルコフ性を満足するという条件下においては、後に明らかになるように本質的な問題ではない。

いま、時刻 τ_i (時点 y_C)において、劣化状態が i から $i+1$ に推移すると考えよう。この時、当該施設の劣化状態が i に留まる期間長（以下、劣化状態 i の寿命と呼

ぶ) は $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1} = y_C$ と表せる. 劣化状態 i の寿命 ζ_i は確率変数であり, 確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$, 分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する. ただし, 劣化状態 i の寿命 ζ_i の定義域は $[0, \infty)$ である. 分布関数の定義より

$$F_i(y_i) = \int_0^{y_i} f_i(\zeta_i) d\zeta_i \quad (3)$$

が成立し, 分布関数 $F_i(y_i)$ は劣化状態が i となった初期時点 $y_i = 0$ (時刻 τ_{i-1}) からサンプル時間軸上のある時点 y_i (時刻 $\tau_{i-1} + y_i$) までに劣化状態が i から $i+1$ に変化した累積確率を表す. したがって, 初期時点 $y_i = 0$ からサンプル時点 $y_i \in [0, \infty)$ まで, 劣化状態が i のまま推移する確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は, 時点 y_i までに劣化状態が i から $i+1$ に変化する累積確率 $F_i(y_i)$ を用いて

$$\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_i\} = \tilde{F}_i(y_i) = 1 - F_i(y_i) \quad (4)$$

と表すことができる. ここで, 施設の健全性が時点 y_i までレーティング i で推移し, かつ期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に $i+1$ に進展する条件付き確率は

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (5)$$

と表せる. 対象とする施設のレーティングが時点 y_i で i から $i+1$ に推移しようとする瞬間的な速度 $\lambda_i(y_i)$ をハザード関数と呼ぶ. 想定する劣化過程に合致するハザード関数を用いることで, 例えば初期不良, 偶発的な劣化, 経年的劣化などを表現することが可能となる.

土木施設の劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を満足し, ハザード関数がサンプル時間軸上の時点 y_i に依存せず, 常に一定値 $\theta_i > 0$ をとると仮定する. すなわち, 次式が成立する.

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \quad (6)$$

ハザード関数 $\lambda_i(y_i) = \theta_i$ を用いれば, レーティング i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は若干の計算⁷⁾により,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(y_i) &= \exp\left[-\int_0^{y_i} \lambda_i(u) du\right] \\ &= \exp(-\theta_i y_i) \end{aligned} \quad (7)$$

と表される.

(3) マルコフ推移確率の導出

カレンダー時刻 τ_{i-1} にレーティングが i に推移し, 検査時刻 τ_A までレーティング i が継続した場合を考えよう. すなわち, 時刻 τ_A における検査の結果, レーティングが i であるという観測情報が得られたとする. このとき, サンプル時間軸上の時点 y_A で, レーティングが i であったという条件の下で, さらに時点 y_A から追加的に $z_i (\geq 0)$ 以上にわたってレーティング i が継続する確率 $\tilde{F}_i(y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A) \\ = \text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A + z_i | \zeta_i \geq y_A\} \end{aligned} \quad (8)$$

と定義できる. 確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ の定義 (4) より,

$$\frac{\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A + z_i\}}{\text{Prob}\{\zeta_i \geq y_A\}} = \frac{\tilde{F}_i(y_A + z_i)}{\tilde{F}_i(y_A)} \quad (9)$$

が成立する. 式 (7) より, 上式の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{F}_i(y_A + z_i)}{\tilde{F}_i(y_A)} &= \frac{\exp\{-\theta_i(y_A + z_i)\}}{\exp(-\theta_i y_A)} \\ &= \exp(-\theta_i z_i) \end{aligned} \quad (10)$$

と変形できる. すなわち, 検査時点 y_A においてレーティングが i として判定され, 次の検査時点 $y_B = y_A + z$ においてもレーティングが i と判定される確率は,

$$\text{Prob}[h(y_B) = i | h(y_A) = i] = \exp(-\theta_i z) \quad (11)$$

と表される. ただし, z は 2 つの検査時点の間隔を表す. ここで, 確率 $\text{Prob}[h(y_B) = i | h(y_A) = i]$ はマルコフ推移確率 p_{ii} に他ならない. つまり, 指数ハザード関数を用いた場合, 推移確率 p_{ii} はハザード率 θ_i と検査間隔 z のみに依存し, 時点 y_A, y_B に関する確定的な情報を用いなくても推移確率を推定することが可能となる.

以上の議論を拡張し, 指数ハザード関数を用いて, 点検時刻 τ_A と $\tau_B = \tau_A + z$ の間で健全度が i から $j (> i)$ に推移するマルコフ推移確率 $p_{ij}(z)$ は,

$$\begin{aligned} p_{ij}(z) &= \text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &(i = 1, \dots, J-1; j = i+1, \dots, J) \end{aligned} \quad (12)$$

と表すことができる⁷⁾. ただし, 表記上の規則として,

$$\begin{cases} \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} = 1 & (k \leq i+1 \text{ の時}) \\ \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} = 1 & (k \geq j \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える. また, p_{iJ} に関してはマルコフ推移確率の条件より次式が成立する.

$$p_{iJ}(z) = 1 - \sum_{j=i}^{J-1} p_{ij}(z) \quad (i = 1, \dots, J-1) \quad (13)$$

(4) マルコフ推移確率の推定

同種の土木施設に関する K 個の 2 時点間の検査データが得られたとする. 検査サンプル k ($k = 1, \dots, K$) には, 2 回の連続する定期検査が実施されたカレンダー時刻 τ_A^k と τ_B^k と, 各検査で計測された施設のレーティング $h(\tau_A^k), h(\tau_B^k)$ に関する情報が記述されている. 検査サンプルにより, 検査間隔が異なっても差し支えない. 以上の検査データに基づいて, 検査サンプル k の検査間隔を $z^k = \tau_B^k - \tau_A^k$ と定義する. さらに, 2 回の検査時刻における劣化推移パターン情報に基づいて, ダミー変数 δ_{ij}^k ($i, j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$) を

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & h(\tau_A^k) = i, h(\tau_B^k) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (14)$$

と定義する。さらに、施設の劣化速度に影響を及ぼす、施設の構造特性や環境条件を表す特性ベクトルを $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_M^k)$ と表す。ただし、 x_m^k ($m = 1, \dots, M$) は検査サンプル k の m 番目の説明変数の観測値を表す。説明変数の観測値としては、構造諸元や環境条件などの定量的データだけでなく、構造形式や材料などの定性的データを用いることができる。なお、第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり、恒等的に $x_1^k = 1$ であるとしよう。定期的な目視検査で得られる検査サンプル k が有する情報は、実測値であることを記号「 $\bar{\cdot}$ 」で強調して、 $\xi^k = (\bar{\delta}_{ij}^k, \bar{z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ として整理できる。

一方、検査サンプル k ($k = 1, \dots, K$) の劣化過程を指数ハザード関数 $\lambda_i^k(y_i^k) = \theta_i^k$ ($i = 1, \dots, J-1$) を用いて表現しよう。レーティング J はマルコフ連鎖の吸収状態であり、 $p_{JJ} = 1$ が成立するためにハザード率 θ_J は必然的に $\theta_J = 0$ となる。土木施設の劣化過程を特徴づけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K$) は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え、ハザード率 θ_i^k を特性ベクトル \mathbf{x}^k を用いて

$$\theta_i^k = f(\mathbf{x}^k; \beta_i) \quad (15)$$

と表そう。ただし、 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ ($m = 1, \dots, M$) によるベクトルである。また、 $x_1^k = 1$ より、 $\beta_{i,1}$ は定数項を表す。したがって、特性ベクトル \mathbf{x}^k は既知であるので、ハザード率 θ_i^k の推定問題が β_i の推定問題として扱うことが可能となる。

マルコフ推移確率は、式(12)で示したように、各レーティングにおけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, J-1; k = 1, \dots, K$) を含む。さらに、ハザード率は施設の特性ベクトル \mathbf{x}^k を用いて式(15)で表現できる。また、推移確率はデータが観察された検査間隔 \bar{z}^k にも依存する。これらのことを明示的に表すため推移確率 p_{ij} を目視検査による実測データ ($\bar{z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k$) と未知パラメータ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{J-1})$ の関数として $p_{ij}(\bar{z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta)$ と表そう。いま、 K 個の土木施設の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば、全検査サンプルの劣化推移パターンの同時生起確率密度を表す尤度関数は

$$\mathcal{L}(\beta) = \prod_{i=1}^{J-1} \prod_{j=i}^J \prod_{k=1}^K \{p_{ij}(\bar{z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta)\}^{\bar{\delta}_{ij}^k} \quad (16)$$

と定式化できる^{26), 27)}。検査データ $\bar{\delta}_{ij}^k, \bar{z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k$ はすべて確定値であり、対数尤度関数は未知パラメータ β の関数である。最尤法では、この尤度関数(16)を最大にするようなパラメータ値 β を推定することになる。以上の手順で得られたパラメータ値 β を用いて、式(15)によりハザード率を算出することで、マルコフ劣化ハザードモデルを記述することが可能となる。

(5) レーティング期待寿命の算出

マルコフ劣化ハザードモデルを用いれば、個別の施設ごとにマルコフ推移確率を推定することが可能である。しかし、現実の土木施設のマネジメントにおいて、施設個々に最適補修戦略を求めると問題が過度に煩雑になる。このため、類似の施設を対象にして平均的なマルコフ推移確率を推定した方が便利な場合が少なくない。そこで、推定した指数ハザードモデルを用いて平均的なマルコフ推移確率を推定する方法について説明する。すなわち、当該レーティングにはじめて到達した時点から、劣化が進展して次のレーティングに進むまでの期待期間長（以下、レーティング期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\tilde{F}_i(y_i^k)$ を用いて

$$R_i^k = \int_0^{\infty} \tilde{F}_i(y_i^k) dy_i^k \quad (17)$$

と表される²⁴⁾。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数 $\tilde{F}_i(y_i^k)$ が式(7)で表されることに留意すれば、レーティング期待寿命は次式となる。

$$R_i^k = \int_0^{\infty} \exp(-\theta_i^k y_i^k) dy_i^k = \frac{1}{\theta_i^k} \quad (18)$$

4. ベイズ推定の方法

(1) ベイズの定理

最尤推定法は、1) 標本数が十分に多い場合、推定量が真の値に確率収束する（一致性）、2) 推定量の漸近的分散がクラメル・ラオの下限に等しい（漸近有効性）という優れた性質を有している²⁸⁾。しかし、現実のアセットマネジメントの場面では、過去に十分な点検が実施されておらず、限られた検査データしか入手できない場合が少なくない。このように限られた検査サンプルに基づいてマルコフ劣化ハザードモデルを最尤法により推定した場合、最尤推定量が不偏性を満足せず、推定量に系統的なバイアスが生じる可能性がある。あるいは、点検実績データがまったく存在せず、技術者の経験的情報に基づいて、マルコフ劣化ハザードモデルを特定化せざるを得ない場合もある。このような場合、限られた事前情報と少ないデータに基づいて、マルコフ劣化ハザードモデルを推定するための方法論が必要となる。さらに、データが蓄積されるに従って、マルコフ劣化ハザードモデルの改良を試みる必要がある。ベイズ推定法は事前情報を活用できるため、標本が少ない場合でも比較的精度よく推定することができるという利点がある。また、推定量の信頼域について検討することにより、マルコフ劣化ハザードモデルによる推定精度や、モデル改良による信頼度の向上の効果も検討することが可能であるという利点がある。

ベイズ推定法では、パラメータの事前分布と、観測されたデータを用いて定義される尤度関数を用いて、パラ

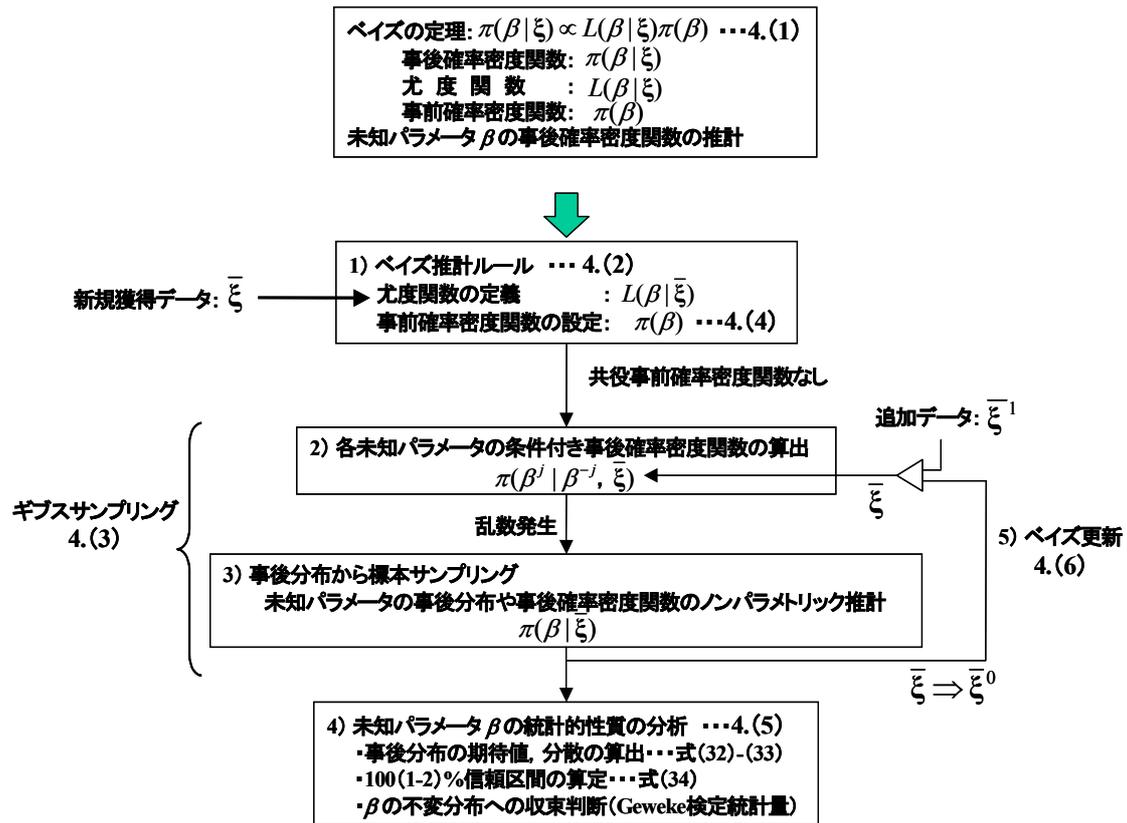


図-3 マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定法

メータの事後分布を推定する。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\beta|\xi)$ と表そう。 β は未知パラメータベクトル、 ξ は観測データを表す。ここで、 β が確率変数で、事前確率密度関数 $\pi(\beta)$ に従うと仮定しよう。この時、観測データ ξ を得たときに未知パラメータ β の事後確率密度関数 $\pi(\beta|\xi)$ はベイズの定理より、

$$\pi(\beta|\xi) = \frac{\mathcal{L}(\beta|\xi)\pi(\beta)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\beta|\xi)\pi(\beta)d\beta} \quad (19)$$

と表すことができる。ただし、 Θ はパラメータ空間である。この時、 $\pi(\beta|\xi)$ は

$$\pi(\beta|\xi) \propto \mathcal{L}(\beta|\xi)\pi(\beta) \quad (20)$$

と表すことができる。記号 \propto は比例を意味する。ここで、式(19)における分母

$$m(\xi) = \int_{\Theta} \mathcal{L}(\beta|\xi)\pi(\beta)d\beta \quad (21)$$

を $\pi(\beta|\xi)$ の基準化定数、あるいは事前予測分布と呼ぶ。一般に、ベイズ推定法は、1) 事前の経験情報などに基づいて、パラメータの事前確率密度関数 $\pi(\beta)$ を設定する。2) 新しく獲得したデータ ξ に基づいて尤度関数 $\mathcal{L}(\beta|\xi)$ を定義する。さらに、3) ベイズの定理(19)に

基づいて事前確率密度関数を修正し、パラメータ β に関する事後確率密度関数 $\pi(\beta|\xi)$ を得る、という手順を採用することになる。以上の手順を、本研究ではベイズ推定ルールと呼ぶ。最尤推定法と異なり、未知パラメータ β の確率分布が、事後分布として求まる点にベイズ推定法の特徴がある。

以下では、マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定法の具体的手順を述べる。読者の便宜を図るために、図-3に、その概要をフローとして整理している。同図中には、推定法の詳細を説明する節番号も明記したので、以降の各節と併せて参照されたい。

(2) ベイズ推定ルール

2時点間の目視検査データを用いて、マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータベクトル β をベイズ推定ルールで推定する方法を考える。新規に獲得したデータを $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^K)$ と表そう。マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定において、検査サンプル k に関して獲得できる情報は $\bar{\xi}^k = (\bar{\delta}_{ij}^k, \bar{z}^k, \bar{x}^k)$ を想定している。3.(5)で示した尤度関数(16)を、式(12)を用いて具

体的に書き表せば,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \prod_{i=1}^{J-1} \prod_{j=i}^J \prod_{k=1}^K \left\{ \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{\theta_l^k}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{\theta_l^k}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \right\}^{\delta_{ij}^k} \quad (22)$$

となる. 一般的に, ハザードモデルにおいて, 事前確率密度関数と事後確率密度関数の関数形が一致するような共役事前確率密度関数²⁹⁾を見出すことは不可能である²¹⁾. 事前分布の設定に関しては, 4.(4)で改めて議論するが, ここでは, β_i の事前確率密度関数が, 標準的な事前確率密度関数として用いられる多次元正規分布に従うと仮定しよう. すなわち, $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ である. ただし, M 次元正規分布 $\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ の確率密度関数は,

$$g(\beta_i|\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_i|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\beta_i - \boldsymbol{\mu}_i)' \right\} \quad (23)$$

で与えられる. ただし, $\boldsymbol{\mu}_i$ は $\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ の事前期待値ベクトル, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は事前分散共分散行列である. 記号 l は転置操作を表す. この時, 事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}})$ は, 式(20)より,

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}}) &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}}) \prod_{i=1}^{J-1} g(\beta_i|\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) \\ &\propto \prod_{i=1}^{J-1} \prod_{j=i}^J \prod_{k=1}^K \left\{ \prod_{l=i}^{j-1} \theta_l^k \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{1}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \right\}^{\delta_{ij}^k} \\ &\cdot \prod_{i=1}^{J-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\beta_i - \boldsymbol{\mu}_i)' \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

となる. しかし, 基準化定数

$$m(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \int_{\Phi} \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}}) \prod_{i=1}^{J-1} g(\beta_i|\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) d\boldsymbol{\beta} \quad (25)$$

を解析的に定義できず, 多重積分値を数値計算で求めざるを得ない. したがって, 事後確率密度関数の共役性を検討する以前の問題として, パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}})$ を明示的に求めることが自体が不可能である. 次節では, パラメータの事後分布に関する統計量をMCMC法を用いて直接求める方法論を提案する.

(3) ギブスサンプリング

ここでは代表的なMCMC法であるギブスサンプリングについて述べる⁹⁾. ギブスサンプリング法は, 事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}})$ を直接求めることが難しい場合に, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用い

て, 反復的にパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ のサンプルを乱数発生させることにより, 事後分布からの標本サンプルを獲得する方法である.

ギブスサンプリング法のアルゴリズムを説明するために, 再び観測データを $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, 未知パラメータを $\boldsymbol{\beta}$ と表そう. また, $\boldsymbol{\beta}$ から $\beta_{e,m}$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\beta}^{-(e,m)}$ と表そう. この時, 式(24)より, $\boldsymbol{\beta}^{-(e,m)}$ を既知とした時の $\beta_{e,m}$ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e,m}|\boldsymbol{\beta}^{-(e,m)}, \bar{\boldsymbol{\xi}})$ は

$$\begin{aligned} \pi(\beta_{e,m}|\boldsymbol{\beta}^{-(e,m)}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) &\propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^J \prod_{k=1}^K \left\{ \theta_e^k \delta_{ij}^k - \delta_{ie}^k \right. \\ &\cdot \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{1}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \left. \right\}^{\delta_{ij}^k} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_e - \boldsymbol{\mu}_e) \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} (\beta_e - \boldsymbol{\mu}_e)' \right\} \\ &\propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^J \prod_{k=1}^K \left\{ \exp(\beta_{e,m} d_m^k) \delta_{ij}^k - \delta_{ie}^k \right. \\ &\cdot \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{1}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \left. \right\}^{\delta_{ij}^k} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{\rho_e^{mm}}{2}(\beta_{e,m} - \hat{\mu}_e^m)^2 \right\} \quad (26) \\ &\hat{\mu}_e^m = \mu_e^m + \sum_{h=1, \neq m}^M (\beta_{e,h} - \mu_e^h) \rho_e^{hm} \end{aligned}$$

と表せる. ただし, δ_{ie}^k は, 検査サンプル k の事前レーティング $d(\tau_A^k) = i$ とギブスサンプリングにおける事前レーティング e が一致した場合に1を, そうでない時に0となるダミー変数である. μ_e^m は事前期待値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_e$ の第 m 要素であり, ρ_e^{hm} は事前分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_e^{-1}$ の第 (h, m) 要素である. また, $\sum_{h=1, \neq m}^M$ は1から M までの要素のうち m を除いた要素の総和を意味する. これらの条件付き確率密度関数から標本を発生させ, その標本を用いてパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の事後分布に関する各種の統計量を計算することができる. MCMC法から得られた標本を用いて, 事後分布の各種統計量を求める方法については, 4.(5)で述べる. このとき, ギブスサンプリング・アルゴリズムは以下のように整理できる.

step1:初期パラメータ値 $\boldsymbol{\beta}(0) = (\beta_{1,1}(0), \dots, \beta_{J-1,M}(0))$

を与える. $n = 1$ とし, サンプル数 \bar{n} を設定する.

step2: $\boldsymbol{\beta}(n) = (\beta_{1,1}(n), \dots, \beta_{J-1,M}(n))$ を次のように発生する.

$\pi(\beta_{1,1}|\boldsymbol{\beta}^{-(1,1)}(n-1), \bar{\boldsymbol{\xi}})$ から $\beta_{1,1}$ を乱数発生する.

$\pi(\beta_{1,2}|\boldsymbol{\beta}^{-(1,2)}(n-1), \bar{\boldsymbol{\xi}})$ から $\beta_{1,2}$ を乱数発生する.

...

$\pi(\beta_{e,m}|\boldsymbol{\beta}^{-(e,m)}(n-1), \bar{\boldsymbol{\xi}})$ から $\beta_{e,m}$ を乱数発生する.

...

$\pi(\beta_{J-1,M}|\boldsymbol{\beta}^{-(J-1,M)}(n-1), \bar{\boldsymbol{\xi}})$ から $\beta_{J-1,M}$ を乱

数発生する.

- step 3: 十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\beta(n)$ を記録.
- step 4: $n = N$ ならば計算終了. $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ として step 2 に戻る.

以上のギブスサンプリングにおいて, 推移核を

$$K(\beta(n-1), \beta(n) | \bar{\xi}) = \prod_{e=1}^{J-1} \prod_{m=1}^M \pi(\beta_{e,m}(n) | \beta^{-(e,m)}(n-1), \bar{\xi}) \quad (27)$$

と定義しよう. この時, $\beta(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) は推移核 $K(\beta(n-1), \beta(n) | \bar{\xi})$ を持つマルコフ連鎖である. さらに, このマルコフ連鎖の定常状態を $\pi(\beta | \bar{\xi})$ と表そう. 十分大きな \underline{n} に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に到達していると考えれば, ギブスサンプリングで求めた $\beta(n)$ ($n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n}$) は, 事後確率密度関数 $\pi(\beta | \bar{\xi})$ からの標本と見なすことができる. したがって, これらの標本を用いて, パラメータベクトル β の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる. なお, ギブスサンプリングを行うためには $(J-1) \times M$ 個の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e,m} | \beta^{-(e,m)}, \bar{\xi})$ ($e = 1, \dots, J-1, m = 1, \dots, M$) を求めることが必要となる. 一般に, $\ln[f(x)]$ が凹関数となるような確率密度関数 $f(x)$ から標本をサンプリングする手法として適応的棄却サンプリング³⁰⁾(ARS) が有効である. 条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e,m} | \beta^{-(e,m)}, \bar{\xi})$ は必ずしもその性質を満たさないことが証明できるが, 多くの場合, $\ln[\pi(\beta_{e,m} | \beta^{-(e,m)}, \bar{\xi})]$ は対数凹関数であると考えられるので, 本研究では式(26)から事後分布のパラメータ β の標本をサンプリングする手法として, ARS を用いることとした.

(4) 事前分布の設定

マルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定する場合には, 技術者が有する事前情報を事前分布として表現できる. しかし前述したように, 事前分布と事後分布の関数形が等しくなるような共役事前分布は存在しない. したがって, 先験的に与える事前分布は, 未知パラメータの真の確率分布を表すのではなく, 過去の推定結果や技術者の技術情報を表現するための道具と考えることができる. 本研究では, マルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータ β_i ($i = 1, \dots, J-1$) の事前確率密度関数が, $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ に従って分布する場合を想定している. このように比較的単純な事前確率密度関数を想定することにより, 先験的知識を事前分布として容易に表現することが可能となる.

利用可能な事前情報として多様なケースが想定される. たとえば, 1) すでに利用可能な既存のマルコフ劣化ハザードモデルが存在する場合 (Case a), 2) 参照

となる類似のマルコフ劣化ハザードモデルが存在する場合 (Case b), 3) 利用可能なマルコフ劣化ハザードモデルは存在しないが, 技術者が主観的に判断できる場合 (Case c), 4) 参照となる事前情報が全く存在しない場合等 (Case d) が考えられる. Case a は, 過去にマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定した結果が存在する場合や, 他のデータベースに対してベイズ推定した結果を初期モデルとして採用できる場合が該当する. このケースでは, 表-1 に示すように, パラメータベクトル β_i の期待値 μ_i と分散共分散行列 Σ_i に関する情報を活用することができる. Case b は, パラメータ値に関する情報が存在するが, その分散, 共分散に関する情報が利用できない場合である. さらに Case c では, 参照となるモデルは存在しないが, 技術者が経験に基づき平均的な施設寿命等の情報を与えることが可能な場合である. 最後に, Case d は参考になる情報が全く存在しない場合である. このようにパラメータベクトル β の期待値と, 分散に関する情報が存在しない場合には, 分散が十分に大きい事前分布

$$\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\mathbf{O}, \kappa_{\beta_i} \mathbf{I}) \quad (28)$$

を用いることが可能である²¹⁾. ただし, κ_{β_i} は十分大きい正数である. また, \mathbf{O} はすべての要素が 0 であるゼロベクトル, \mathbf{I} は単位行列を表す. あるいは, Jeffreys 型無情報事前分布³¹⁾

$$g(\beta_{i,m}) \propto \tilde{\beta}_{i,m} \quad (29)$$

を利用することができる. ただし, $\tilde{\beta}_{i,m}$ は $-\infty < \tilde{\beta}_{i,m} < \infty$, を満足する任意定数である. なお, Jeffreys 型無情報事前分布は定義区間上で積分しても 1 にならないので非正則な事前分布と呼ばれる. 非正則な事前分布は確率密度関数ではないが, 非正則な事前分布 (29) を用いてベイズ推定ルールにより事後分布を求めることができる^{8), 31)}. すなわち, Jeffreys 型無情報事前分布を用いた場合, ギブスサンプリングにおける条件付き事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_{e,m} | \beta^{-(e,m)}, \bar{\xi}) \\ & \propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^J \prod_{k=1}^K \left\{ \exp(\beta_{e,m} x_m^k)^{\delta_{ij}^k - \delta_{ie}^k} \right. \\ & \cdot \left. \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{1}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \right\}^{\delta_{ij}^k} \end{aligned} \quad (30)$$

と表される. 式(30)は両辺の比例関係を表すため, これらの式の右辺から Jeffreys 型無情報パラメータ $\tilde{\beta}_{i,m}$ は消去されている. このように獲得可能な事前情報のタイプによって, ギブスサンプリングにおいて用いる条件付き事後確率密度関数が異なる.

表-1 事前情報のタイプ

	Case a	Case b	Case c	Case d
μ_i	○	○	△	×
Σ_i	○	×	×	×

注) ○印は事前分布のパラメータに関する情報が利用可能であることを, △印は $\beta_{i,1}$ の期待値 $\mu_{i,1}$ に関する情報のみが利用可能であることを表す. ×印は利用可能でないことを表す. また, μ_i, Σ_i はパラメータベクトル β_i の平均ベクトル, 分散共分散行列を表す.

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC法によって得られた標本に基づいて, パラメータベクトル β に関する統計的性質を分析することができる. MCMC法を用いた場合, パラメータの事後確率密度関数 $\pi(\beta|\xi)$ を解析的な関数として表現することはできない. 得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推定することとなる. いま, ギブスサンプリングから得られた標本を $\beta(n) (n = 1, \dots, \bar{n})$ と表そう. ただし, $\beta(n) = (\beta_1(n), \dots, \beta_{J-1}(n))$ である. この内, 最初の \underline{n} 個の標本は収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義しよう. このとき, パラメータ β の同時確率分布関数 $G(\beta)$ は

$$G(\beta) = \frac{\#\{\beta(n) \leq \beta, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (31)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{\beta(n) \leq \beta, n \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\beta(n) \leq \beta, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である. また, パラメータ β_i の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\mu}_i(\beta_i)$, 分散・共分散行列 $\tilde{\Sigma}_i(\beta_i)$ は, それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(\beta_i) &= (\tilde{\mu}(\beta_{i,1}), \dots, \tilde{\mu}(\beta_{i,M}))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,1}(n)}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,M}(n)}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\tilde{\Sigma}_i(\beta_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,1}) & \dots & \tilde{\sigma}(\beta_{i,1}\beta_{i,M}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_{i,M}\beta_{i,1}) & \dots & \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,M}) \end{pmatrix} \quad (32b)$$

と表される. ただし,

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_{i,m}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\mu}(\beta_{i,m})\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\beta_{i,m}\beta_{i,l}) &= \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\mu}(\beta_{i,m})\}\{\beta_{i,l}(n) - \tilde{\mu}(\beta_{i,l})\}}{\bar{n} - \underline{n}} \\ & \quad (33b) \end{aligned}$$

である. $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間に関しては, 標本順序統計量 $(\underline{\beta}_{i,m}^\alpha, \bar{\beta}_{i,m}^\alpha) (i = 1, \dots, J-1, m = 1, \dots, M)$

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{i,m}^\alpha &= \arg \max_{\beta_{i,m}(n^*)} \\ & \left\{ \frac{\#\{\beta_{i,m}(n) \leq \beta_{i,m}(n^*), n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{i,m}^\alpha &= \arg \min_{\beta_{i,m}(n^{**})} \\ & \left\{ \frac{\#\{\beta_{i,m}(n) \geq \beta_{i,m}(n^{**}), n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \end{aligned} \quad (34b)$$

を用いて $\underline{\beta}_{i,m}^\alpha < \beta_{i,m} < \bar{\beta}_{i,m}^\alpha$ と定義できる.

MCMC法では初期値 $\beta(0)$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. すなわち, 式(27)の推移核を持つマルコフ連鎖が定常状態に到達している保証はない. なお, 不変分布とはサンプル中の個々の要素が確率変動したとしても, 全体としての分布の特性が変化しないような確率分布を指す. ギブスサンプリングを合計 \bar{n} 回繰り返し, \bar{n} 個のサンプルの内, 最初の \underline{n} 個の標本 $\beta(n) (n = 1, \dots, \underline{n})$ を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える. そこで, $\underline{n} + 1$ 回以降の標本が, 不変分布である事後分布からの標本であるかどうか(マルコフ連鎖が定常状態に到達したかどうか)を仮説検定するGewekeの方法³²⁾を説明する. パラメータのギブス標本 $\beta(n) = (\beta_1(n), \dots, \beta_{J-1}(n)) (n = \underline{n} + 1, \dots, \bar{n})$ の中から, 最初の n_1 個と最後の n_2 個のデータを取りあげよう. このとき, パラメータ $\beta_{i,m} (i = 1, \dots, J-1, m = 1, \dots, M)$ の不変分布への収束を判断するためのGeweke検定統計量は,

$$Z_{\beta_{i,m}} = \frac{\bar{\beta}_{i,m}^1 - \bar{\beta}_{i,m}^2}{\sqrt{\nu_1^2(\beta_{i,m}) + \nu_2^2(\beta_{i,m})}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (35)$$

$$\bar{\beta}_{i,m}^1 = \frac{\sum_{n=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \beta_{i,m}(n)}{n_1}$$

$$\bar{\beta}_{i,m}^2 = \frac{\sum_{n=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \beta_{i,m}(n)}{n_2}$$

$$\nu_1^2(\beta_{i,m}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\beta_{i,m}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^2(0)}{n_2}$$

と定義できる. ただし, $f_{\beta_{i,m}}^j(x) (j = 1, 2)$ はスペクトル密度関数であり, $2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^j(0)$ の推定値は

$$2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^j(0) = \hat{\omega}_0^j + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) \hat{\omega}_{i,m}^j \quad (36)$$

$$\hat{\omega}_0^j = \tilde{\sigma}_j^2(\beta_{i,m})$$

$$\hat{\omega}_{i,m}^1 = \frac{\sum_{g=\underline{n}^\circ}^{\underline{n}+n_1} (\beta_{i,m}(g) - \bar{\beta}_{i,m}^1)(\beta_{i,m}(g-s) - \bar{\beta}_{i,m}^1)}{n_1}$$

$$\hat{\omega}_{i,m}^2 = \frac{\sum_{g=\bar{n}^\circ}^{\bar{n}} (\beta_{i,m}(g) - \bar{\beta}_{i,m}^2)(\beta_{i,m}(g-s) - \bar{\beta}_{i,m}^2)}{n_2}$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{q+1}$$

として求まる^{33), 34)}. ただし, $\underline{n}^\circ = \underline{n} + s + 1, \bar{n}^\circ =$

$\bar{n} - n_2 + s + 1$ である。ここで、 $\beta_{i,m}$ ($i = 1, \dots, J - 1, m = 1, \dots, M$)の不变分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\beta_{i,m}}| \leq z_{\alpha/2} \\ H_1 : |Z_{\beta_{i,m}}| > z_{\alpha/2} \end{cases} \quad (37)$$

と設定しよう。ただし、 $z_{\alpha/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である。有意水準 $\alpha \cdot 100\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合、 $z_{\alpha/2}$ は $\alpha/2 = 1 - \Phi(z_{\alpha/2})$ を満足する値として定義できる。ただし、 $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である。

(6) ベイズ更新ルール

ベイズ推定において、事前分布と事後分布が同一の関数形を持つような共役事前分布が存在する場合、新しく獲得した追加データを用いて未知パラメータのベイズ推定値を容易に更新することができる。しかしながら、マルコフ劣化ハザードモデルの場合、共役事前分布が存在しない。したがって、ベイズ更新を実施するに際しては、モデルの推定に用いる過去の点検データを全て蓄積しておかなければならない。

いま、ベイズ更新の方法を説明するために、第1回目の検査データ ξ^0 を用いてマルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータに関する事後分布(24)が求めた場合を考えよう。その上で、第2回目の検査データ ξ^1 を用いて、未知パラメータの事後分布を更新する問題を取り上げる。検査サンプル k に関して獲得できる情報は、 $\xi^k = (\delta_{ij}^k, z^k, \bar{x}^k)$ である。さらに、第1回目の検査データ $\xi^0 = (\delta_{ij}^k, z^k, \bar{x}^k)$ ($k = 1, \dots, k_1$)と第2回目の検査データ $\xi^1 = (\delta_{ij}^k, z^k, \bar{x}^k)$ ($k = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$)をプールしたデータベースを定義する。第1回目のベイズ推定における未知パラメータベクトルの事後確率密度関数を $\pi(\beta|\xi^0)$ とすれば、ベイズ更新を行った後の未知パラメータベクトルの事後密度関数 $\pi(\beta|\xi^0, \xi^1)$ は

$$\begin{aligned} \pi(\beta|\xi^0, \xi^1) &\propto \mathcal{L}(\beta|\xi^1)\pi(\beta|\xi^0) \\ &\propto \mathcal{L}(\beta|\xi^0, \xi^1) \prod_{i=1}^{J-1} g(\beta_i|\mu_i, \Sigma_i) \end{aligned} \quad (38)$$

と表すことができる。ここに、 $\mathcal{L}(\beta|\xi^0, \xi^1)$ は、第1回目と第2回目の検査データをプールしたデータベースを用いて定義される尤度関数である。一方、 $g(\beta_i|\mu_i, \Sigma_i)$ は、それぞれ第1回目のベイズ推定時に用いた β_i の事前分布である。したがって、ベイズ更新後の事後分布は

$$\begin{aligned} \pi(\beta|\xi^0, \xi^1) &\propto \prod_{i=1}^{J-1} \prod_{j=i}^J \prod_{k=1}^{k_1+k_2} \left\{ \prod_{l=i}^{j-1} \theta_l^k \right. \\ &\cdot \sum_{h=i}^j \prod_{l=i}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \prod_{l=h}^{j-1} \frac{1}{\theta_{l+1}^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z^k) \left. \right\}^{\delta_{ij}^k} \end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{J-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \mu_i)\Sigma_i^{-1}(\beta_i - \mu_i)' \right\} \quad (39)$$

となる。すなわち、式(39)より明らかのように、未知パラメータの事後分布を更新するためには、新しい点検データを追加したデータベースに対して尤度関数を定義し、ギブスサンプリングにより事後分布を新しく求めることが必要となる。なお、無情報事前分布を用いた場合も同様に、新しいデータを追加したデータベースに対して尤度関数を定義することにより、ギブスサンプリングより未知パラメータの事後分布を更新することができる。

5. 適用事例

(1) 適用事例の概要

本研究で提案した方法論の有効性を検討するために、NY市が管理する橋梁の目視検査データを用いて、マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定を試みる。NY市の橋梁目視検査および検査データの詳細については、すでに多くの文献^{35),36)}で紹介しているので、ここでは適宜概要を述べるに止める。ベイズ推定の具体的な対象として、直接輪荷重が作用し、維持管理上の重要部材であるRC床版を取り上げる。RC床版に対する目視検査の7段階のレーティング評価基準を表-2に示す。NY市の蓄積データは膨大で、連続する2時点から得られる検査データは32,902サンプルに及ぶ。しかし、現実にはこのように豊富な検査サンプルを有するデータベースが利用可能な場合はそれほど多くない。そこで、このようなデータベースから標本を抽出した2次データベースを作成し、提案したベイズ推定法の有効性について実証的に検証する。

以下、本章ではギブスサンプリングを用いて事後分布から標本を発生させる。5.(2)ではまず、10年間分の検査データが整備されているデータベース(以下、原データベースと呼ぶ)を用いて、最尤推定との比較検証を通してギブスサンプリングの有効性について検証する。5.(3)では、原データベースから、データをランダム抽出したデータベースを人為的に再構成し、検査データの蓄積量とモデルの推定精度の関係について分析する。さらに、5.(4)では、初期事前情報がマルコフ劣化ハザードモデルの推定結果に及ぼす影響について検討する。

(2) ギブスサンプリングの有効性

ベイズ推定に用いる指数ハザード関数を

$$\begin{aligned} \theta_i^k &= \exp(\beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k) \\ (i &= 1, \dots, 6; k = 1, \dots, K) \end{aligned} \quad (40)$$

表-3 バイズ推定法による推定結果 (原データベース使用)

健全度	式(41)の事前分布			無情報事前分布		
	定数項 $\beta_{i,1}$	平均交通量 $\beta_{i,2}$	床版面積 $\beta_{i,3}$	定数項 $\beta_{i,1}$	平均交通量 $\beta_{i,2}$	床版面積 $\beta_{i,3}$
1	-1.078 (1.01)	—	1.389 (0.11)	-1.100 (0.16)	—	2.854 (0.16)
2	-1.549 (0.99)	0.255 (0.92)	2.662 (0.04)	-1.555 (0.80)	0.237 (0.91)	3.033 (1.05)
3	-1.970 (1.20)	0.690 (1.16)	—	-1.973 (0.27)	0.699 (1.24)	—
4	-2.432 (1.53)	0.824 (1.47)	0.498 (0.23)	-2.442 (0.97)	0.849 (1.10)	0.506 (0.98)
5	-2.316 (0.94)	—	—	-2.322 (0.21)	—	—
6	-1.882 (0.51)	1.279 (0.90)	—	-1.955 (0.03)	1.538 (0.09)	—
対数尤度	-20062			-20060		

注) 括弧内は Geweke 検定統計量を表す。

表-2 7段階レーティング評価基準³⁵⁾

健全度	物理的な意味 (RC床版)
1	新設状態, 劣化の兆候がほとんどみられない.
2	1と3の間
3	一部分で漏水が確認できる. (漏水を伴う 一方向ひび割れ, 端部で斑点状の漏水)
4	3と5の間
5	床版面積75%以上から漏水が確認できる. 一部分で剥離や剥落が確認できる. 桁上フランジに沿った遊離石灰が確認できる.
6	5と7の間
7	深刻な剥落や遊離石灰が確認できる. 抜け落ちやその傾向が確認できる.

注) NY市の健全度評価では, 新設状態をレーティング7に, 以降劣化が進行するほどレーティング番号が小さくなるように健全度が表記されている.

と特定化しよう. なお, 上式(40)の説明変数は, 参考文献⁷⁾において選択した説明変数の組をそのまま採用している. x_2^k, x_3^k は, それぞれRC床版 k の平均交通量, 床版面積を採用している. 以下, $\beta_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3})$ と表記しよう. 式(40)では, $\theta_i^k > 0$ の制約条件を自動的に満足するために指数関数による回帰式を用いている.

表-3には, 事前情報を

$$\beta_i \sim N_3(\mathbf{O}, \mathbf{I}) \quad (41)$$

と設定した事前分布を用いて, マルコフ劣化ハザードモデルをバイズ推定した結果 (パラメータの標本平均) を示している. さらに, Geweke 検定統計量(35)も併せて示している. ギブスサンプリングを実施する際に, マルコフ連鎖が定常状態に到達するためのサンプル数として $\underline{n} = 3,000$ を設定した. 表-3に示すとおり, Geweke 検定統計量 $Z_{\beta_{i,m}}$ はいずれも1.96を下回っており, 有意

水準5%で収束仮説を棄却できないことが分かる. 以後の計算でも $\bar{n} = 13,000$ と設定し, $\underline{n} = 3,000$ 個の標本を事後分布に収束する過程からの標本として除き, 残りの10,000個のパラメータ標本を用いて分析を行うこととする. なお, 比較のため, 原データベースを用いて, マルコフ劣化ハザードモデルを最尤推定法により推定した結果を表-4に併記している. 最尤推定法による推定方法に関しては, 参考文献⁷⁾を参照されたい. 全てのパラメータに関する事前分布の確率密度関数が, その定義域において正の値をとり, かつ滑らかな場合, 事後分布は最尤推定量を平均とし, フィッシャー情報量の逆数を分散とする正規分布に漸近する³⁷⁾. 表-3に示すように, 原データベースと式(41)に示す事前分布を用いた場合, ほとんどのパラメータで標本平均が表-4に示す最尤推定量とほぼ等しくなっており, ギブスサンプリングが効率的に行われていることが分かる. しかし, パラメータの標本平均と最尤推定量が異なるパラメータが存在する. その原因として, 最尤推定量と事後分布の平均が完全に一致するには, 依然ギブスサンプルデータが不十分であること, が考えられる. このようにギブスサンプリングの効率が悪い原因として, 事前分布の分散が小さいことがあげられる. 事前分布の分散とギブスサンプリングの効率性の関係に関しては, 5.(4)で改めてとりあげる. ただし, 表-3, 表-4に示すとおり, 各モデルの対数尤度にほとんど違いは見られない. 表-3には併せて, 無情報事前分布(29)によるバイズ推定による推定結果を記載している. 無情報事前分布は事前分布の分散を無限大に設定した場合に他ならない. 無情報事前分布からの標本平均は, 最尤推定量にほぼ一致しており, マルコフ劣化ハザードモデルのバイズ推定と最尤法による推定結果の間に本

表-4 最尤法による推定結果

健全度	(原データベース使用)		
	定数項 $\beta_{i,1}$	平均交通量 $\beta_{i,2}$	床版面積 $\beta_{i,3}$
1	-1.101 (-30.35)	-	2.888 (2.76)
2	-1.555 (-42.44)	0.239 (1.90)	3.029 (9.16)
3	-1.973 (-68.45)	0.696 (7.33)	-
4	-2.440 (-57.38)	0.845 (6.55)	0.513 (3.85)
5	-2.323 (-50.51)	-	-
6	-1.951 (-14.81)	1.544 (3.56)	-
対数尤度	-20060		

注) 括弧内の数字はt値を表す。

質的な差異は存在しない。

(3) データ蓄積量と推定精度

a) 劣化期待値パス

分析対象とする原データベースから、以下の手続きで2次データベースを作成し、データ量とベイズ推定による推定精度を検討する。まず、原データベースから無作為非復元抽出によって得られた500個の履歴データベースを D_{500} とする。さらに、原データベースから追加的に無作為非復元抽出を行い、新たに得られた500個の履歴データと D_{500} を合わせた計1000個の履歴データベースを D_{1000} とする。同様に、 D_{1500} 、 D_{2000} の履歴データベースを作成する。以上の合計4個の2次データベースに基づいて、マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ更新を試みる。事前時点における事前分布を、分散が十分に大きい事前分布(28)を用いて

$$\beta \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{O}, 10000\mathbf{I}) \quad (42)$$

と設定しよう。マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ更新の手順は以下のとおりである。1) 初期事前分布(23)とデータベース D_{500} を用いて、条件付き事後確率密度関数(26)を定義する。2) 条件付き事後確率密度関数(26)からギブスサンプリングによりパラメータ標本を発生させる。3) 発生したパラメータ標本を用いて、パラメータ平均と分散・共分散(32a),(32b)を算定する。4) 新しい履歴データを追加したデータベース D_{1000} を用いて定義された尤度関数を用いて、条件付き事後確率密度関数を定義する。5) 条件付き事後確率密度関数を用いてギブスサンプリングによりパラメータ標本を発生させる。6) 以上の方法をデータベース $D_{500} \sim D_{2000}$ に対して繰り返す。

表-5は、データベース $D_{500} \sim D_{2000}$ に対して、マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ更新を逐次繰り返した結果を示している。ベイズ推定法の1つの特徴は、モデルのパラメータ値の確率分布が求まる点にある。モデルのパラメータ値の信頼域は標本順序統計量 $(\beta_{i,m}^\alpha, \bar{\beta}_{i,m}^\alpha)$ ($i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, 3$) を用いて分析することができる。その結果、表-5に示すように、検査データ数が増加するほど、信頼区間の幅が狭くなる傾向が読み取れる。さらに、劣化期待値パスを用いて、ベイズ更新によってマルコフ劣化ハザードモデルの推定精度がどのように変化するかを確認しよう。指数ハザード関数のパラメータ値が異なれば、そこから導出される劣化期待値パスも変化する。ギブスサンプリングより求めたパラメータ標本 $\beta(n)$ を用いれば、ギブスサンプル n のハザード率は

$$\theta_i^k(n) = \exp(\beta_{i,1}(n) + \beta_{i,2}(n)x_2^k + \beta_{i,3}(n)x_3^k) \quad (43)$$

と定義される。このとき、ギブスサンプル n のレーティング期待寿命 $R_i^k(n)$ は、式(18)と同じように、

$$R_i^k(n) = \frac{1}{\theta_i^k(n)} \quad (44)$$

と表現できる⁷⁾。また、レーティング期待寿命の標本平均値を次式で得ることができる。

$$E[R_i(n : \bar{x}^k)] = \sum_{n=n+1}^{\bar{n}} \frac{R_i(n : \bar{x}^k)}{\bar{n} - n} \quad (45)$$

さらに、レーティング期待寿命の $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間を定義するために標本順序統計量 $\underline{H}^\alpha(\bar{x}^k), \bar{H}^\alpha(\bar{x}^k)$ を

$$\underline{H}^\alpha(\bar{x}^k) = \arg \max_{R_i^*(\bar{x}^k)} \left\{ \frac{\#(R_i(n : \bar{x}^k) \leq R_i^*(\bar{x}^k), n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - n} \leq \alpha \right\} \quad (46a)$$

$$\bar{H}^\alpha(\bar{x}^k) = \arg \min_{R_i^{**}(\bar{x}^k)} \left\{ \frac{\#(R_i(n : \bar{x}^k) \geq R_i^{**}(\bar{x}^k), n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - n} \leq \alpha \right\} \quad (46b)$$

と表そう。その上で、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間の下限値 $\underline{H}^\alpha(\bar{x})$ をもとに作成した劣化期待値パス(以下、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と呼ぶ)と上限値 $\bar{H}^\alpha(\bar{x}^k)$ をもとに作成した劣化期待値パス(以下、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線と呼ぶ)を求めた。図-4には、データセット D_{1000}, D_{2000} のそれぞれに対して求めた $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線を示している。ただし、 \bar{x}_2^k, \bar{x}_3^k には平均交通量0.2266、平均床版面積0.0431(最大交通量および最大床版面積が1となるように基準化した)を用いている。また、 $\alpha = 0.05$ に設定しており、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線はそれぞれ90%信頼上限曲線と90%信頼

表-5 マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ更新結果

	D_{500}	D_{1000}	D_{1500}	D_{2000}
$\beta_{1,1}$	-1.60(-2.26,-1.02)	-1.07(-1.45,-0.71)	-1.05(-1.35,-0.77)	-1.23(-1.51,-0.97)
$\beta_{1,3}$	21.5(0.16,49.1)	-0.69(-13.2,9.19)	-1.19(-13.5,8.64)	-2.05(-13.7,7.51)
$\beta_{2,1}$	-1.92(-2.47,-1.42)	-1.65(-1.98,-1.33)	-1.70(-1.97,-1.44)	-1.66(-1.90,-1.43)
$\beta_{2,2}$	1.64(0.05,3.20)	1.21(0.22,2.16)	1.07(0.25,1.86)	1.18(0.49,1.87)
$\beta_{2,3}$	-5.52(-23.30,8.83)	-4.32(-14.00,3.44)	1.72(-1.43,5.10)	2.09(-0.06,4.31)
$\beta_{3,1}$	-1.64(-1.97,-1.32)	-1.90(-2.14,-1.65)	-1.76(-1.96,-1.56)	-1.85(-2.02,-1.68)
$\beta_{3,2}$	-0.30(-1.45,0.82)	0.67(-0.14,1.47)	0.51(-0.15,1.15)	0.94(0.38,1.48)
$\beta_{4,1}$	-2.13(-2.73,-1.57)	-2.30(-2.70,-1.92)	-2.27(-2.58,-1.97)	-2.31(-2.58,-2.05)
$\beta_{4,2}$	-2.89(-5.58,-0.35)	-0.19(-1.52,1.14)	-0.14(-1.17,0.85)	-0.05(-0.91,0.81)
$\beta_{4,3}$	2.17(0.41,3.79)	0.60(-0.84,1.85)	0.89(-0.16,1.84)	0.59(-0.49,1.52)
$\beta_{5,1}$	-2.35(-3.01,-1.75)	-2.49(-2.99,-2.06)	-2.28(-2.65,-1.94)	-2.28(-2.60,-1.99)
$\beta_{6,1}$	-4.92(-10.30,-1.62)	-1.86(-3.18,-0.77)	-2.50(-3.87,-1.36)	-1.79(-2.74,-0.98)
$\beta_{6,2}$	3.83(-5.33,14.60)	0.24(-4.24,4.08)	0.41(-4.28,4.77)	-1.22(-4.74,1.93)

注) 表中の数字はパラメータの標本平均値 $\bar{\mu}(\beta_{i,m})$ を表す。括弧内は各パラメータの90%信頼域を示している。データ数が増加するほど、信頼区間の幅が狭くなる傾向にあることが理解できる。

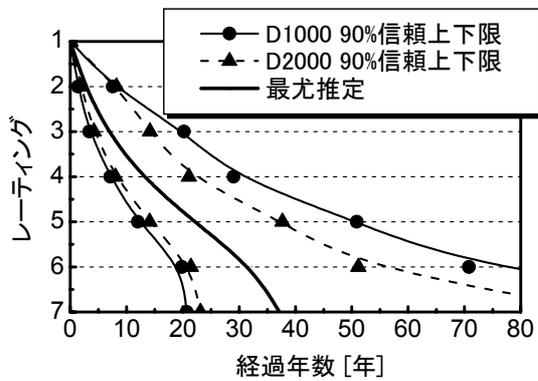


図-4 劣化期待値パス

注) x_2^k, x_3^k には平均交通量0.2266, 平均床版面積0.0431を用いた。なお、データセット D_{1000} と D_{2000} から推定したレーティング期待寿命の標本平均値はそれぞれ41.86年と40.22年であった。

下限曲線を表している。図-4に示すように、蓄積されたデータが多くなるほど、90%信頼上限曲線と90%信頼下限曲線の幅が狭まっていることが理解できる。同図には最尤推定量から求めた劣化期待値パスを合わせて載せている。データが蓄積されていくにつれて、この劣化期待値パスに信頼下限曲線、信頼上限曲線が近づいていくと考えられる。

b) 健全度分布

施設管理者が管理する施設、あるいは特定部材の平均的な劣化傾向を捉えるためには、劣化期待値パスを算出することが有効である。一方で、施設全体、あるいは部材全体のレーティング分布の経年推移を把握することもアセットマネジメントを実践していく上では重

要であろう。そこで、マルコフ推移確率を用いて、レーティング分布の経年推移を分析する。

ベイズ推定によって式(43)で定義したギブスサンプル n のハザード率が得られれば、マルコフ推移確率は式(12)と式(13)から推定することができる。さらに、レーティング期待寿命の場合と同様に、検査サンプル k のマルコフ推移確率の標本平均値 $E[p_{ij}(n; \mathbf{x}^k)]$ と標本順序統計量 $(p_{ij}^\alpha(\mathbf{x}^k), \bar{p}_{ij}^\alpha(\mathbf{x}^k))$ を定義する。具体的な式の定義は割愛するが、適宜、式(45), (46a), (46b)を参照されたい。表-6, 7は D_{1000}, D_{2000} に対するベイズ推定結果から算出したマルコフ推移確率の標本平均値 $E[p_{ij}(n; \mathbf{x}^k)]$ であり、表-8は最尤推定量から算出したマルコフ推移確率である。なお、マルコフ推移確率についても標本順序統計量を算出することで信頼域を評価することができる。

つぎに、レーティング分布を算出しよう。ある任意時点 t における、レーティング i のサンプル数を $n_i(t)$ と表す。サンプル総数に対して、レーティング i が占める割合をレーティング i の占有率と呼び、次式で表す。

$$X_i(t) = \frac{n_i(t)}{\sum_{i=1}^J n_i(t)} \quad (47)$$

さらに、各レーティングの占有率を要素とする状態ベクトルを次のように定義する。この状態ベクトルが当該時点 t でのレーティング分布に他ならない。

$$\mathbf{X}_t = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_J(t)) \quad (48)$$

ただし、上式は $\sum_{i=1}^J X_i(t) = 1$ が成立する。このとき時点 $t+1$ における状態ベクトル \mathbf{X}_{t+1} は、時点 t の状態ベクトル \mathbf{X}_t とマルコフ推移確率行列 $\mathbf{\Pi}$ を用いて、

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t \mathbf{\Pi} \quad (49)$$

と示すことができる。さらに、時点 $t+2$ の状態ベクト

表-6 ベイズ推定法に基づくマルコフ推移確率の標本平均値 (データセット D_{1000} 使用)

健全度	1	2	3	4	5	6	7	ハザード率
1	0.7169	0.2539	0.0275	0.0017	0.0000	0.0000	0.0000	0.3328
2	0	0.8107	0.1732	0.0156	0.0005	0.0000	0.0000	0.2099
3	0	0	0.8400	0.1522	0.0076	0.0002	0.0000	0.1744
4	0	0	0	0.9062	0.0899	0.0036	0.0002	0.0985
5	0	0	0	0	0.9208	0.0729	0.0063	0.0825
6	0	0	0	0	0	0.8483	0.1517	0.1646
7	0	0	0	0	0	0	1	-

表-7 ベイズ推定法に基づくマルコフ推移確率の標本平均値 (データセット D_{2000} 使用)

健全度	1	2	3	4	5	6	7	ハザード率
1	0.7649	0.2046	0.0285	0.0019	0.0000	0.0000	0.0000	0.2680
2	0	0.7618	0.2154	0.0220	0.0008	0.0000	0.0000	0.2720
3	0	0	0.8229	0.1682	0.0086	0.0003	0.0000	0.1949
4	0	0	0	0.9045	0.0907	0.0046	0.0002	0.1004
5	0	0	0	0	0.9032	0.0908	0.0060	0.1018
6	0	0	0	0	0	0.8811	0.1189	0.1266
7	0	0	0	0	0	0	1	-

表-8 最尤法に基づくマルコフ推移確率 (原データベース使用)

健全度	1	2	3	4	5	6	7	ハザード率
1	0.6862	0.2749	0.0368	0.0021	0.0001	0.0000	0.0000	0.3766
2	0	0.7756	0.2064	0.0174	0.0006	0.0000	0.0000	0.2541
3	0	0	0.8497	0.1422	0.0078	0.0002	0.0000	0.1628
4	0	0	0	0.8977	0.0974	0.0046	0.0003	0.1079
5	0	0	0	0	0.9067	0.0844	0.0089	0.0980
6	0	0	0	0	0	0.8174	0.1826	0.2017
7	0	0	0	0	0	0	1	-

ルは、上式の \mathbf{X}_{t+1} を \mathbf{X}_t と置き、同様の行列計算を行って求める。最終的に、アセットマネジメントの対象期間内におけるレーティング分布の推移は、この繰り返し計算を必要な回数だけ実施することで得られる。

時点 t において、NY市の全てのRC床版が新設状態である場合を考えよう。レーティングは全て1であるので、状態ベクトルの初期値は、

$$\mathbf{X}_t = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (50)$$

となる。任意時点 t を $t=0$ として、式(50)を式(49)に代入し、繰り返し計算を100回行った。推定したマルコフ推移確率は、検査間隔が1年であるので、100回繰り返し計算を行えば、100年間のレーティング分布の推移を把握することができる。図-5は、 D_{2000} から推定したマルコフ推移確率(表-7)を用いた場合のレーティング分布の推移である。レーティング1を保ち続けるRC床版は20年後にはほとんど存在しない。その後は劣化の進行が進み、より高いレーティング(劣化が進行した状態を表すレーティング)の占有率が増加してくる。また、前節の劣化期待値パスでレーティング期待寿命の標本平均値を与えた40年付近では、RC床版の約50%が使用限界である健全度7に達していることがわかる。さらに、図-6, 7は、マルコフ推移確率の90%信頼上下限値 ($\underline{p}_{ij}^\alpha(\mathbf{x}^k), \overline{p}_{ij}^\alpha(\mathbf{x}^k)$) を用いて、レーティング

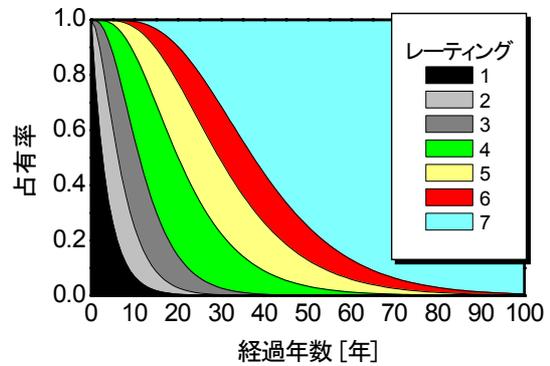


図-5 レーティング分布
マルコフ推移確率の標本平均値 $E[p_{ij}(n : \mathbf{x}^k)]$

分布を算出した結果であり、それぞれ悲観的シナリオ、楽観的シナリオとみなすことができる。実際に、図-6では50年後にはほとんどのRC床版が使用不可能な状態に達するのに対して、図-7では100年経過後であってもレーティング4が存在する。アセットマネジメントにおいて戦略レベルの意思決定を行う際には、平均的な劣化の予測のみならず、このような両極端のシナリオを想定しておくことも重要である。

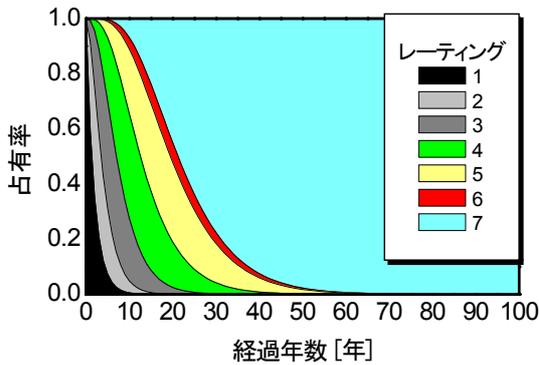


図-6 レーティング分布
マルコフ推移確率の90%信頼下限値 $p_{ij}^{\alpha}(x^k)$

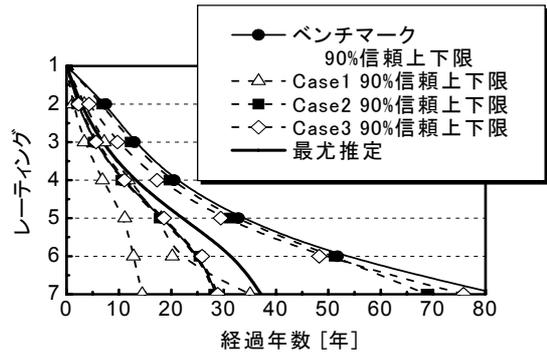


図-8 劣化期待値パス

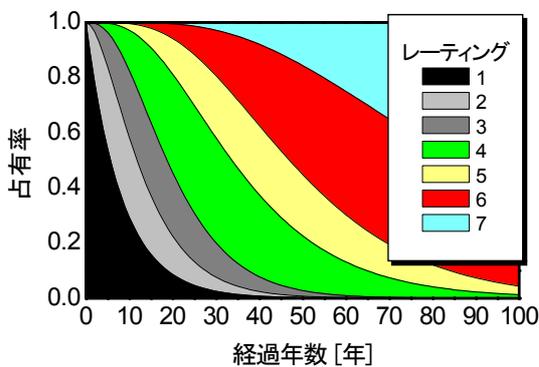


図-7 レーティング分布
マルコフ推移確率の90%信頼上限値 $\bar{p}_{ij}^{\alpha}(x^k)$

(4) 事前情報と推定精度

ベイズ推定における事前情報(事前分布の与え方)が推定結果に及ぼす影響を分析する。はじめに、3つの説明変数(定数項、交通量、床版面積)のパラメータに関する事前分布の分散と推定精度の関係について分析しよう。図-8に、ベイズ推定を行った劣化期待値パスの90%信頼上下限曲線を示している。全ての説明変数に対する事前情報として、式(42)に示すような多次元正規分布を想定した。図-8に示すとおり、ベイズ推定による90%信頼上下限が28.57年および82.67年となり、信頼区間の範囲内に最尤法で推定した際の期待寿命(37.17年)が存在していることがわかる。このケースをベンチマークとして、説明変数のうち、定数項の分散のみを0.01としたケース(Case1)、交通量の分散のみを0.01としたケース(Case2)、床版面積のみを0.01としたケース(Case3)についてベイズ推定を行った。分析者が事前分散を小さく設定することは、分析者が事前情報に対して「確信度が高い(自信がある)」と評価していることを表している。全ケースの推定結果も図-8に示すが、ベンチマークとの比較を通して、説明

変数のうち、交通量と床版面積については分散を変化させても推定結果にほとんど影響を及ぼさないことがわかる。一方で、RC床版の識別番号である定数項の影響が大きいことが理解できる。これは定数項が表-4に示すとおりt-値が大きく、元々説明力強い変数であったことがあげられる。このように、ハザード関数の定数項の信頼性は、劣化予測の精度に大きな影響を及ぼすことになる。そこで、以下では、定数項に着目し、定数項に関する事前分布の与え方が推定結果に及ぼす影響を分析することとする。まず、定数項に関する事前情報が得られる場合を想定しよう。定数項に関する事前情報が存在するということは、分析者がレーティング期待寿命に関する情報を有している場合に他ならない。このケースは表-1に示した事前情報のタイプの中で、Case b、もしくはCase cの場合に相当する。定数項の事前分布(28)の分散パラメータ κ_{β_1} を0.01、および1000に設定した2つの計算ケースを想定しよう。前者は、分析者がレーティング期待寿命の正しさに関する確信度が高い場合を想定している。逆に、後者は、分析者のレーティング期待寿命の正しさに関する確信度が極めて低い場合が相当する。それぞれのケースに対して、マルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定し、劣化期待値パスを求めた。分散 $\kappa_{\beta_1} = 0.01$ に設定した場合の期待値パスを図-9に、 $\kappa_{\beta_2} = 1000$ とした場合の期待値パスを図-10に示している。当然のことながら、分析者がレーティング期待寿命に関する正しい事前情報を持っている場合、推定に用いる検査サンプル数が同一である限り、定数項の事前分布の分散が小さいほうが、パラメータの信頼区間の幅が狭くなる。特に、図-9においては、信頼区間の幅が十分に小さく、検査サンプル数が500程度であっても期待値パスを高い精度で推定できることを示している。

つぎに、レーティング期待寿命に関する事前情報が存在しない場合を想定しよう。表-1のタイプでは、Case

dに対応している。この場合、分析者の経験的な判断よりレーティング期待寿命を設定せざるを得ない。分析者が事前情報として設定する定数項が、正しい値になっている保証はない。そこで、分析者が誤った定数項に関する事前分布を設定した場合をとりあげ、事前情報の誤りがベイズ推定の結果に及ぼす影響を分析してみよう。ここでは、事前分布の定数項を、最尤法の推定結果より1.2倍大きく設定した場合を想定する。さらに、定数項の事前分布の分散に関して、1) 誤情報に対する確信度が高い ($\kappa_{\beta_1} = 0.01$)、2) 誤情報に対する確信度が低い ($\kappa_{\beta_1} = 1000$) という2つのケースを設定する。それぞれのケースに対して劣化期待値パス、および信頼区間を求めた結果を図-11および図-12に示している。誤情報を弱く信じた場合には、検査サンプル数が少ない場合に信頼区間の幅は広がるが、検査サンプル数の増加とともに劣化期待値パスが真の劣化期待値パスに収束していくことがわかる。すなわち、データの蓄積とともに、事前の誤情報の影響が薄れていき、次第に客観的な推定結果に移行していくことが理解できる。一方で、事前の誤情報を強く信じた場合には、検査サンプル数2000程度では誤情報を修正することができず、劣化期待値パスが真の劣化期待値パスの信頼区間の外側にはずれている。さらに、検査サンプル数が増加しても信頼区間の変動は微小である。すなわち、誤情報に強い信念を持つ場合、検査サンプル数を蓄積しても、初期信念の誤りによるバイアスを容易に補正できないことが理解できる。したがって、実用的には強い信念を持って誤った情報を与えるよりは、事前分布の分散をある程度大きくし、データの蓄積とともにマルコフ劣化ハザードモデルを更新していくことが望ましいと言える。特に、新たな目視結果が獲得された時点で、実際の劣化状態が劣化期待値パスの信頼域の外側に外れている場合、誤った事前情報に基づいてマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定している可能性が高い。この場合、事前情報の分散を増加させる方向に修正し、劣化期待値パスとその信頼区間を再計算することが必要となる。

(5) 実用化への示唆

現在のアセットマネジメントの実践に向けたデータの蓄積状況は、1) ある程度のデータが蓄積されている(されつつある)、2) データ収集に取り掛かったばかりで活用できるデータはない、という2つに分類することができる。前者はこれまでも目視検査を実施してきた実績がある大手の施設管理者、後者は財政的・人材的に厳しい制約下にある中小の施設管理者がそれぞれ該当する。前者の場合には、現段階で蓄積されたデータを用いてベイズ推定や最尤法により初期のマル

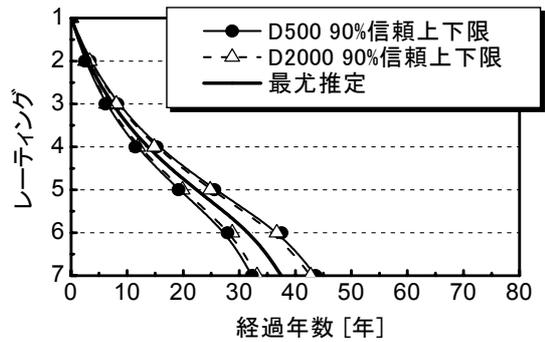


図-9 劣化期待値パス ($\kappa_{\beta_1} = 0.01$)

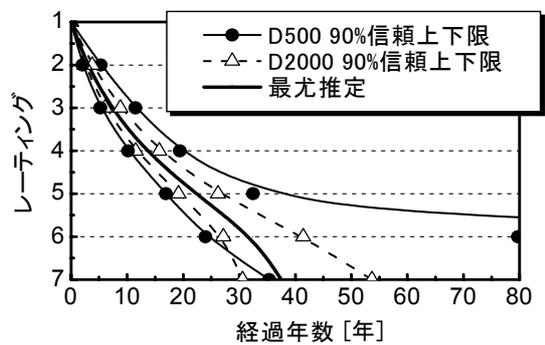


図-10 劣化期待値パス ($\kappa_{\beta_1} = 1000$)

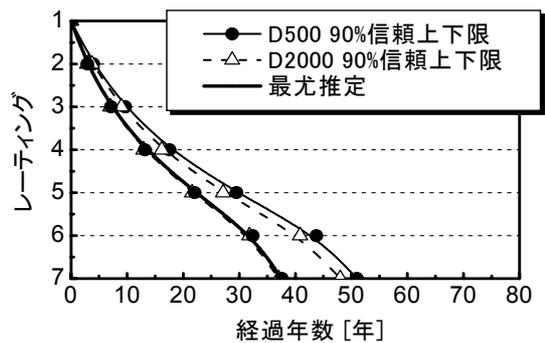


図-11 誤情報に基づいた劣化期待値パス ($\kappa_{\beta_1} = 0.01$)

コフ劣化ハザードモデルを推定することができる。これを事前情報として今後の劣化予測に使用することが可能であり、客観的データに基づく定量的な劣化予測をアセットマネジメントに組み込むことができる。一方で、後者の場合には、事前分布の設定はインハウスエンジニアや専門技術者の経験や知識・ノウハウに基づ

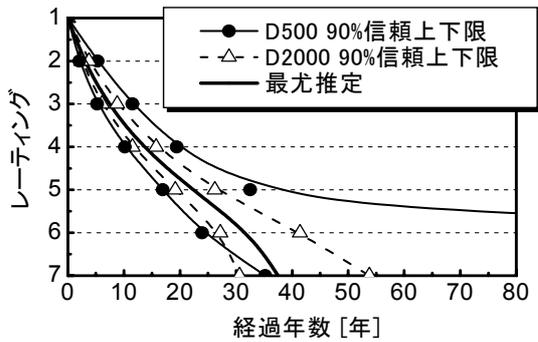


図-12 誤情報に基づいた劣化期待値パス ($\kappa_{\beta_1} = 1000$)

く主観的情報に負うところが大きい。ただし、この場合には実証分析 5.(4) で確認したように、誤った事前情報を強い信念で設定すると、後に収集する目視検査データでの軌道修正が困難となる。したがって、5.(4) の多次元正規分布を例にとると、予測期待寿命の期待値に関する事前情報を与えながらも、確信の度合に関わらず分布の分散は大きく設定することが望ましい。また、ベイズ推定の大きな特徴として、推定結果の信頼区間を算出できることがある。信頼区間を管理指標とすることで効率的な維持管理が可能となる。例えば、5.(3)、5.(4) で90%信頼区間を算出したが、予めパーセンタイルを閾値として設定しておき、劣化期待値パスの信頼区間を算出し、そこからはずれるような検査サンプルを検出した際には、別途詳細調査を実施する等、アクションを設定しておくことで統計的データに基づく意思決定が実現できる。なお、現実には、レーティングが悪化すると予防保全が実施される場合が多い。このため、劣化が進行したレーティングに関する検査サンプルが減少するというサンプル欠損の問題が発生する。劣化期待値パスを利用する場合、レーティングの後半のマルコフ劣化ハザードモデルの推定精度に関してはサンプル欠損の問題が残されていることに留意することが必要である。

6. まとめ

アセットマネジメントの実践において、土木施設の劣化予測手法を確立することは喫緊の課題である。本研究では、目視検査結果のように多段階のレーティングで健全度が評価されるケースを取り上げ、マルコフ劣化ハザードモデルを用いてマルコフ推移確率をベイズ推定する方法論を提案した。土木施設の劣化状態に関する検査データの蓄積が不十分な場合、専門技術者の経験情報や他の地域や施設における推定結果を活用し、劣化予測モデルを推定せざるを得ない。ベイズ推定に

は、技術者の先験的な経験情報を事前情報として活用し、それと目視検査結果による実測データを組み合わせることで劣化予測を行うことができるという望ましい性質がある。さらに、本研究では、NY市が管理する橋梁のRC床版に対する目視検査結果を用いて、マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定法の有効性について実証的に検討した。その結果、正しい事前情報が与えられた場合、少ない目視検査サンプルを用いても、豊富な検査サンプルに基づいて最尤法を用いて推定した結果と同程度の推定結果を得ることが可能であることを示した。さらに、誤った事前情報を与えた場合であっても確信度を低く設定する（本ケースでは分散を大きく設定する）ことで情報の蓄積とともに推定精度が向上していくことも確認した。以上のようにマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定する方法論は、モデルの柔軟性と拡張性に優れ、かつ実用性の高い手法であり、適用事例を蓄積することで多様な種類の土木施設の劣化予測に適用可能であると考えられる。

一方で、目視検査データを用いた統計的劣化予測手法の開発には、今後検討すべき課題として次の項目を挙げることができる。1つは、時間依存型の劣化過程に対するベイズ推定である。本研究で採用した統計的劣化予測手法であるマルコフ劣化ハザードモデルは状態依存型の劣化過程を扱ったモデルである。時間依存型の劣化過程は多段階ワイブルハザードモデル¹⁵⁾を用いてモデル化することが可能である。このような時間依存型劣化過程に対するベイズ推定法を構築する必要がある。2つは、サンプリングデータに偏りがある場合のベイズ推定である。すなわち、劣化が進行した段階では何らかの対策が施されるために、劣化が進行したレーティングに関する検査サンプルが減少するというサンプル欠損の問題が発生する。またこれとは反対に、健全性の高いレーティングにおいてもサンプル欠損の問題が無視できないことがある。つまり、現状の目視検査の性質上、損傷や変状を検出することが第一目的であるために健全性の低いレーティング情報が優先的に記録され、健全性の高いレーティング情報が得られないケースがある。したがって、これらのサンプル欠損（情報に偏り）の問題を考慮したベイズ推定手法が必要となる。3つは、個別施設あるいは個別部材の劣化予測である。個々の土木施設には無視できない異質性が含まれる場合がある。特に、初期時点での工事不良や初期故障が存在する場合、このような異質性が問題になる。アセットマネジメントを実践するためには、土木施設の劣化過程に関するデータの中から、個別の土木施設が有する異質性をベイズ推定法により識別するようなマイクロレベル（戦術レベル）の方法論の開発が不可欠である。4つは、目視検査結果に含まれる誤

差の影響を考慮した劣化予測である。橋梁のように多数の部材で構成され、それぞれの部材の検査が目視に委ねられている場合には、目視検査結果は、検査者の主観的な判断ミス、見落とし等の観測誤差を必然的に含む。したがって、被説明変数に観測誤差が含まれる劣化ハザードモデルの開発が求められる。

本研究を遂行するに際して、NY市交通局のBojidar Yanev博士から目視検査データを提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表す。なお、本研究で得られた知見は、著者ら独自のものであり、NY市やその他のいかなる団体の正式な見解ではないことを付記しておく。

参考文献

- 1) 小林潔司：分権的ライフサイクル費用評価と集計的効率性，土木学会論文集，No.793/IV-68，pp.59-71，2005.
- 2) 小林潔司，上田孝行：インフラストラクチャ・マネジメント研究の課題と展望，土木学会論文集，No.744/IV-61，pp.15-27，2003.
- 3) 織田澤利守，石原克治，小林潔司，近藤佳史：経済的寿命を考慮した最適修繕政策，土木学会論文集，No.772/IV-65，pp.169-184，2004.
- 4) 貝戸清之，保田敬一，小林潔司，大和田慶：平均費用法に基づいた橋梁部材の最適補修戦略，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.83-96，2005.
- 5) 貝戸清之，阿部允，藤野陽三：実測データに基づく構造物の劣化予測，土木学会論文集，No.744/IV-61，pp.29-38，2003.
- 6) 杉崎光一，貝戸清之，小林潔司：目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築，構造工学論文集，土木学会，Vol.52A，pp.781-790，2006.
- 7) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.
- 8) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
- 9) 伊庭幸人：計算統計学のフロンティアー計算統計II，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.
- 10) Yanev, B.: Life-Cycle Performance of Bridge Components in New York City, *Proceedings of Recent Advances in Bridge Engineering*, pp.385-392, 1997.
- 11) 例えば，Abed-Al-Rahim, I.J. and Johnston, D.W.: Bridge Element Deterioration Rates, *Transportation Research Record*, Vol.1490, pp.9-18, 1995.
- 12) 武山泰，嶋田洋一，福田正：マルコフ連鎖モデルによるアスファルト舗装の破壊損傷評価システム，土木学会論文集，No.420/V-13，pp.135-141，1990.
- 13) 小牟禮建一，濱田秀則，横田弘，山路徹：RC 栈橋上部工の塩害による劣化進行モデルの開発，港湾空港技術研究所報告，Vol.41，No.4，pp.3-37，2002.
- 14) 内山典之，平野廣和，佐藤尚次：床版の劣化予測を考慮した橋梁維持管理システムの構築，土木学会第59回年次学術講演会，I-137，2004.
- 15) 青木一也，山本浩司，津田尚胤，小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集，No.798/VI-68，pp.125-136，2005.
- 16) 例えば，小林潔司，藤高勝己：合理的期待形成を考慮した経路選択モデルに関する研究，土木学会論文集，No.458/IV-18，pp.17-26，1993.
- 17) Guttman, J. and Sinha, S.K.: Bayesian inference about the reliability function for the exponential distributions, *Communications in Statistics*, Vol.A.5, 1976.
- 18) Martz, H.F. and Waller, R.A.: *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- 19) Sharma, K.K., Krishina, H. and Singh, B.: Bayes estimation of the mixture of hazard-rate model, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.55, pp.9-13, 1997.
- 20) Sinha, D. and Dey, D.: Semiparametric Bayesian analysis of survival data, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.92, pp.1195-1212, 1997.
- 21) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.
- 22) 津田尚胤，貝戸清之，山本浩司，小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法，土木学会論文集F，Vol.62，No.3，pp.473-491，2006.
- 23) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.
- 24) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 25) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 26) Tobin, J.: Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, Vol.26, pp.24-36, 1958.
- 27) Amemiya, T. and Boskin, M.: Regression analysis when the dependent variables is truncated lognormal, with an application to the determination of the duration of welfare dependency, *International Economic Review*, Vol.15, p.485, 1974.
- 28) 東京大学教養学部統計学教室編：自然科学の統計学，東京大学出版会，1992.
- 29) 繁枅算男：ベイズ統計入門，東京大学出版会，1985.
- 30) Gilks, W. R. and Wild, P.: Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling, *Applied Statistics*, Vol.41, pp.337-348, 1992.
- 31) Jeffreys, H.: *The Theory of Probability*, Oxford University Press, 1961.
- 32) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 33) Chib, S.: Marginal likelihood from Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 34) Newey, W. K. and West, K. D.: A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 35) State of New York, Department of Transportation: *Bridge Inspection Manual*, 1997.
- 36) 貝戸清之：ニューヨーク市における橋梁維持管理マネジメントの現状，橋梁と基礎，Vol.36，No.10，pp.37-41，2002.
- 37) 鈴木雪夫，国友直人編：ベイズ統計学とその応用，東京大学出版会，1989.

(2006.5.17 受付)

BAYESIAN ESTIMATION OF MARKOV DETERIORATION HAZARD MODEL

Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI

In many practices of the bridge asset management, the life cycle costs are estimated by statistical deterioration prediction models based upon human inspection data. In many applications, it is, however, often the case that the validity of statistical deterioration prediction models is flawed by inadequate stocks of inspection date. In this paper, a systematic methodology is presented to provide the estimates of the deterioration process with bridge managers based upon the empirical judgments by the experts at the early stages, and revised them as the new data are obtained through inspections. More concretely, the Bayesian estimation methodology is presented to improve the Markov deterioration hazard model by the Markov Chain Monte Carlo methods. The paper is concluded by illustrating the application examples of the methodology presented in this paper applied to the data set in the real field.