

# 測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル

小林潔司<sup>1</sup>・貝戸清之<sup>2</sup>・林秀和<sup>3</sup>

<sup>1</sup>フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail:kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 大阪大学特任講師 大学院工学研究科グローバル若手研究者フロンティア研究拠点  
(〒565-0871 吹田市山田丘2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 三菱UFJリサーチ&コンサルティング株式会社 政策研究事業本部 研究開発第2部  
(〒541-8512 大阪市中央区今橋2-5-8 トレードピア淀屋橋)

E-mail:hayashi@murc.jp

土木施設の劣化予測モデルとして、劣化過程を健全度間の推移確率を用いて表現したマルコフ劣化モデルが提案されている。土木施設の健全度の評価結果には、ランダム誤差や、多くの劣化事象の中から評価対象となる事象を選択する場合に生じるシステム誤差が存在する。本研究では、土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルとして表現するとともに、健全度の測定結果に誤差が発生するメカニズムを隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現する。その上で、真の健全度により定義されるマルコフ劣化モデルを、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) シミュレーションによりベイズ推計する方法論を提案する。さらに、道路舗装を対象とした適用事例を通じて、隠れマルコフ劣化モデルの有効性について考察する。

**Key Words** : *hidden Markov chain, measurement errors, representation matter, MCMC*

## 1. はじめに

土木施設の統計的劣化予測モデルとして、マルコフ劣化モデルが提案されている。マルコフ劣化モデルは、土木施設の劣化状態を複数の健全度を用いて評価し、土木施設の劣化による健全度間の時間的推移過程をマルコフ推移確率を用いて表現する。マルコフ劣化モデルは操作性が高く、米国の標準的な橋梁マネジメントシステムの1つであるPONTIS等をはじめとして、アセットマネジメントにおける劣化予測モデルとして幅広く適用されている<sup>1)</sup>。

マルコフ劣化モデルの適用事例では、複数の時刻で実施された劣化状態の測定結果に基づいて、マルコフ推移確率が推計されることになる。しかし、劣化状態の測定結果には、誤差が含まれる場合が少なくない。測定誤差が発生する原因は多様であるが、本研究では、「対象とする道路区間に存在する劣化事象の中から、当該施設の劣化度をどの劣化事象で代表させるか」という代表値問題により発生するシステム誤差の問題に着目する。特に、舗装のような土木施設では、ひび割れ、わだち、非平坦性等といった劣化事象が膨大な数に及ぶため、路面性状調査において、常にもっとも損傷度が進んだ劣化事象が特定されるわけではない。このような代表値問題による測定誤差が発生する場合、路面性状調査における測定結果に基づいたマルコフ劣化モデルの推計結果に系統的なバイアスが発生する。

マルコフ劣化モデルは、「真の健全度」間のマルコフ推移確率を用いて定義される。しかし、劣化状態の測定結果に誤差が存在する場合、測定結果によって得られる情報は「見かけの健全度」であり、「真の健全度」に関する情報は獲得できない。見かけの健全度を用いて推計したマルコフ推移確率が、真の推移確率に一致する保証はない。本研究では、現実に測定された「見かけの健全度」と測定されない「真の健全度」の関係を混合分布モデルで表現するとともに、「真の健全度」を用いて定義されるマルコフ推移確率と、システム誤差を介在して測定される「見かけの健全度」の関係を隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現する。のちに、5. で考察するように、隠れマルコフ劣化モデルは、通常の方法を用いて推計することが困難である。そこで、本研究では、隠れマルコフ劣化モデルをマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo:以下、MCMCと略す) シミュレーションを用いてベイズ推計する方法論について考察する。

以上の問題意識の下に、本研究では測定結果にシステム誤差が介在するような土木施設の劣化過程を、隠れマルコフ劣化モデルを用いて推計する方法論を提案する。さらに、道路舗装を対象として、本研究で提案した方法論の有効性を検証する。以下、2. では、本研究の考え方を説明する。3. では、システム誤差が存在しない劣化過程をマルコフ劣化モデルを用いて記述する。4. では、システム誤差が存在するような劣化過程

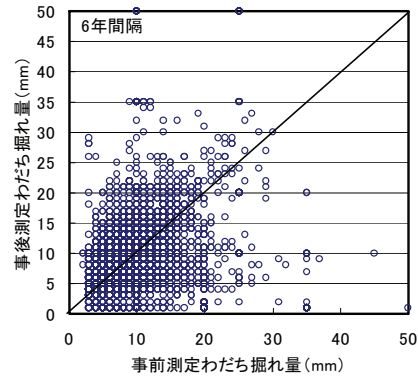
を隠れマルコフ劣化モデルを用いて定式化する。5. では、隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法論を提案する。6. では、道路舗装を対象とした実証分析について考察する。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 従来の研究概要

土木施設の劣化予測に関しては、数多くの研究事例がある。土木施設の統計的劣化予測モデルとしてマルコフ劣化モデルが提案されている。マルコフ推移確率の推計方法として、1) 集計的推計方法と、2) 非集計的推計方法が存在する。前者の方法は、ある一定の測定期間の中で生じた健全度間の推移状態に関するデータに基づいて、マルコフ推移確率を直接推計することを目的とする。もっとも単純な算定方法は、健全度間の推移状態に関する実データの数え上げにより、推移確率を直接定義する方法<sup>4)</sup>である。これに対して、最尤法により、推移確率を推計する方法<sup>5)</sup>も提案されている。マルコフ推移確率は、推移確率を定義する測定間隔に依存する。現実に測定される健全度データには、測定間隔が異なる多様なデータが混在している場合が多い。この場合、実データが測定された測定間隔の差異がもたらす影響を補正することが必要となる。杉崎等<sup>6)</sup>は、異なる測定間隔を有する目視点検データを用いて、マルコフ推移確率を集計的に推計する方法を提案している。しかし、このような集計的劣化予測方法では、個々の施設が置かれている使用環境や、施設が有する構造的、機能的特性と推移確率との関係をモデル化できないという限界がある。

これに対して、非集計的推計方法は、個々の土木施設の劣化過程に関する情報に基づいて、その背後にある劣化過程の統計的規則性を推計する方法である。このような非集計的推計方法として、貝戸等<sup>7)</sup>は、ニューヨーク市における橋梁の目視点検データを用いて、橋梁の劣化速度に着目した平均劣化曲線の算出方法を検討している。また、劣化速度を確率変数と捉えて、過去の検査履歴を反映したマルコフ推移確率の推計方法を提案した。その後、非集計的推計方法は、ハザードモデルの適用により、飛躍的な発展を遂げている。その中で、青木等は、ワイブルハザードモデルを用いて、トンネル照明の寿命解析を行っている<sup>8)</sup>。Mishalani and Madanat<sup>9)</sup>は、2つの隣接する健全度のみを対象として、マルコフ推移確率を指数ハザードモデルを用いて表現する方法を提案した。これとは独立に、津田等<sup>10)</sup>は、2つ以上の任意の健全度間における推移状態を表現する多段階指数ハザードモデルを提案し、マルコフ推移確率を推計する一般的な方法論を提案した。その後、マ



注) 45度線より下方に位置するサンプルは、時間の経過により健全度が改善された事例を表している。このようなサンプルは、理論的には存在しない。

図-1 道路舗装のシステム誤差

ルコフ推移確率が過去の記憶を有する非斉次マルコフ推移確率を推計するための多段階ワイブル劣化ハザードモデル<sup>11)</sup>、異なる劣化パターン間の推移過程を表現する階層型指数劣化ハザードモデル<sup>12)</sup>が提案されている。また、マルコフ推移確率の推計方法に関しては、測定データが非常に少ない段階で、技術者の経験情報と測定結果を結合してマルコフ推移確率を推計するベイズ推計モデル<sup>13),14)</sup>、予防補修によって測定データが欠損することにより発生する欠損バイアスを補正する方法<sup>15)</sup>、ハザード率の異質性を考慮したランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル<sup>16)</sup>が提案されている。以上の方法は、いずれも測定結果に誤差が存在しない場合を想定したものである。しかし、本研究の適用事例としてとりあげる道路舗装をはじめとして、土木施設の健全度の測定結果に多大な誤差が含まれる場合が少なくない。本研究では、システム誤差を考慮した劣化予測モデルを隠れマルコフ劣化モデルを用いてモデル化することを目的とする。筆者等の知る限り、システム誤差を考慮してマルコフ推移確率の非集計的推計方法を開発した研究事例は他に見あたらない。

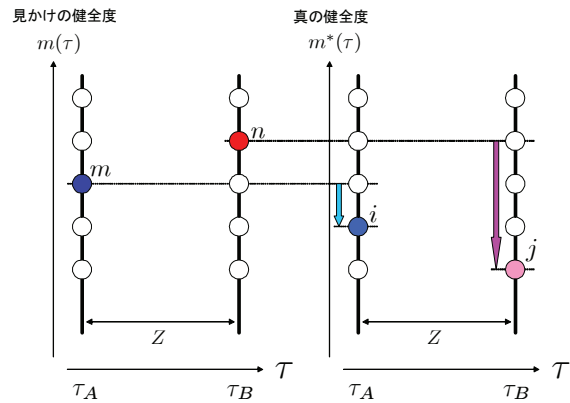
### (2) システム誤差と代表値問題

本研究では、隠れマルコフ劣化モデルの適用事例として舗装の劣化過程をとりあげる。図-1は、実証分析の対象としてとりあげた舗装の劣化過程に関するデータを示したものである。図中の各点は、同一の道路区間に対して、2つの測定時刻 $T_A$ と $T_B$  ( $T_A < T_B$ )において測定されたわだち掘れ量の対応関係を示している。ここで、各サンプルにより、道路舗装の特性や、測定間隔は多様に異なっていることを断っておく。ただし、同図では、2つの測定時刻の間に、舗装の予防的補修が実

施されなかった道路区間に関するサンプルのみを取り上げている。道路舗装の予防的補修を実施しない限り、時間の進行に伴って道路舗装の健全度が、改善されることはあり得ない。したがって、測定サンプルは、すべて図中の45度線より上方に位置しなければならない。しかし、同図に示すように、本来あり得ない45度線より下方の領域に位置するサンプルも相当程度存在し、舗装の健全度データには、かなりの程度の測定誤差が存在していることが推察できる。

このような測定誤差として、1) ランダム誤差、2) 代表値問題によるシステム誤差が考えられる。道路舗装の劣化状態を、たとえば路面性状測定車で計測する場合、必然的に機器測定に伴う測定誤差が介在してくる。これらの測定誤差は、基本的にはランダム誤差と考えることができる。もちろん、測定機器特有の誤差や測定日特有の誤差が介在する場合、システム誤差が発生する。異なる測定業務により測定された測定サンプルに対して、平均値等マクロ的な特性を比較検討することにより、システム誤差が存在するかどうかを検討することが必要であることは言うまでもない。しかし、舗装の劣化状態の測定結果には、別のシステムの理由により発生する測定誤差が存在する。道路舗装の劣化により現れるわだち、ひび割れ、非平坦性等の個別の現象を劣化事象と呼ぼう。ある道路区間における舗装の健全度は、その道路区間の中に存在する劣化事象に基づいて定義される。ところが、道路区間の中には、膨大な数の劣化事象が存在しており、路面性状調査によりすべての劣化事象に関する情報が得られるわけではない。その結果、道路舗装の健全度は、道路区間に存在する劣化事象の中からランダムに抽出されたサンプルに基づいて定義されることになる。この場合、今回の測定時刻において、前回の測定時に健全度を定義したサンプルより、損傷の程度が小さい劣化事象がサンプルされる(健全度が前回よりも改善する)場合も起こりえる。しかし、補修が実施されない限り、前回にサンプルされた劣化事象は、少なくとも損傷が改善されずに残存しているわけであり、健全度が改善されるはずはない。この場合、当該道路区間の健全度を定義する際に、「どの劣化事象が代表としてとりあげられているのか」ということが問題となる。このように、土木施設の健全度が異なる劣化事象に基づいて定義されることにより発生するシステム誤差の問題を代表値問題(representation matter)と呼ぶこととしよう。

土木施設の劣化状態を評価する場合、対象とする施設に存在する劣化事象の中で、もっとも損傷度が進行した劣化事象に基づいて健全度が定義されることが多い。例えば、実証分析の対象事例では、同一道路区間に対して3箇所の舗装状態を測定し、その中からもっとも損



注) システム的誤差により、時間の経過により見かけの健全度が改善された事例を表している。システム的誤差が存在するため、見かけの健全度は、常に真の健全度より上方に位置している。

図-2 健全度とシステム誤差

傷が進んだ箇所の健全度を用いて、当該道路区間の健全度を代表させている。あるいは、道路区間をさらに複数区間に細分化し、細分化された各区間のもっとも損傷が進んだ箇所の健全度を求めるとともに、これらの健全度の平均値を区間全体の健全度として定義することもある。このような方法で健全度を定義しても、時間の経過とともに、健全度が回復するという事象は理論的には起こり得ない。しかし、路面性状調査により獲得されたデータは、劣化事象の中からサンプル抽出されたものであり、常に損傷がもっとも進んだ劣化事象が抽出されるわけではない。したがって、ランダム抽出された劣化事象で定義される健全度は、真の健全度より損傷の程度が少なくなるというシステム的なバイアスが発生することになる。本研究では、現実の舗装の測定データに基づいて、システム誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを作成するとともに、舗装の測定結果にシステム的な測定バイアスが存在するかどうかを実証的に分析する。なお、舗装劣化予測の実務では、図-1の45度線以下に位置するサンプルをデータベースから除去し、45度線より上方に位置するサンプルのみを用いて劣化曲線を推計する場合が多い。しかし、この場合でも、代表値問題によるシステム的な推計バイアスの問題は解決していない。

### (3) システム誤差と隠れマルコフ劣化過程

健全度の測定にシステム誤差が存在する場合に生起する問題を図-2を用いて説明しよう。土木施設の真の劣化状態が  $I$  個のレーティング指標(本研究では、健全度と呼ぶ)  $i (i = 1, \dots, I)$  で表現されると考えよう。 $i = 1$  の場合、健全度がもっとも優れた状態にあり、 $i = I$  はもっと

も悪い状態と対応している。いま、ある時刻 $\tau_A$ で健全度を測定した結果、健全度が $m(\tau_A) = m$  ( $m = 1, \dots, I$ )であると判定されたとしよう。しかし、測定の結果には、測定誤差が含まれる可能性がある。時刻 $\tau_A$ における真の(システム誤差がない)健全度を $m^*(\tau_A) = i$  ( $i = 1, \dots, I$ )と表そう。健全度調査の結果にシステム誤差が存在する場合、測定によって得られた「見かけの健全度」 $m(\tau_A) = m$ が、「真の健全度」 $m^*(\tau_A) = i$ に一致する保証はなく、真の健全度より小さい値が観測される可能性がある。ここで、健全度調査による測定結果が、離散的確率分布 $f_i(m|\alpha_i)$ に従って分布すると考えよう。ただし、確率分布 $f_i(m|\alpha_i)$ は、「真の健全度」が $i$ であるときに、健全度が $m$ と判定される条件付き確率分布(以下、条件付システム誤差分布と呼ぶ)である。また、 $\alpha_i$ は、確率分布を特徴づけるパラメータベクトルである。つぎに、時刻 $\tau_A$ から、ある一定の時間 $z$ が経過した時刻 $\tau_B = \tau_A + z$ に、再び測定を実施したとしよう。健全度調査による測定結果を $m(\tau_B) = n$ と、時刻 $\tau_B$ における「真の健全度」を $m^*(\tau_B) = j$ と表そう。この2つの健全度も互いに一致する保証はない。以上の測定結果より、期間 $[\tau_A, \tau_B]$ の間に生起する「見かけの健全度」の変化パターンは $m \rightarrow n$ となる。一方、「真の健全度」の推移パターンは $i \rightarrow j$ である。システム誤差が存在する場合、それぞれの時刻で測定された健全度が「真の健全度」であるかどうかは判らない。したがって、健全度調査によって測定されるのは「見かけの推移パターン」 $m \rightarrow n$ であり、「真の推移パターン」 $i \rightarrow j$ は測定されないことになる。「見かけの推移パターン」に関するデータに基づいて、健全度間の推移確率 $\pi_{mn}$ を推計しても、それが「真の推移パターン」に基づいて定義される推移確率 $\pi_{ij}$ に一致する保証はない。このように、測定結果に誤差が介在する場合、「真の健全度」間で定義されるマルコフ劣化過程が、システム誤差を含んだ「見かけの健全度」の間で定義されるマルコフ連鎖の背後に隠れてしまうという現象が生じる。

本研究では、このようにシステム誤差を含んだ見かけのデータの中に、真の劣化過程を表すマルコフ連鎖が隠れている状況を隠れマルコフ劣化モデルを用いてモデル化する点に特徴がある。隠れマルコフ劣化モデルでは、測定結果に誤差が含まれるメカニズムを表す確率 $f_i(m|\alpha_i)$ と、「真の健全度」に対して定義される推移確率 $\pi_{ij}$ を同時推計することが課題となる。なお、正確には、「真の健全度」 $i$ が測定できないため、「見かけの健全度」 $m$ が、異なる条件付システム誤差分布 $f_i(m|\alpha_i)$  ( $i = 1, \dots, I$ )の中から、どの条件付システム誤差分布により発生したデータなのかも判らない。したがって、「見かけの健全度」に関するデータを発生した条件付システム誤差分布を推計する方法論が必要となる。このた

め、隠れマルコフ劣化モデルの推計問題は複雑となるが、推計方法に関しては5. で考察する。

### 3. マルコフ劣化モデル

#### (1) モデル化の前提条件

土木施設の劣化過程をモデル化するために、ひとまずシステム誤差が存在せず、常に真の健全度が測定される場合を考えよう。システム誤差を考慮した劣化過程に関しては、4. で議論する。土木施設の劣化予測モデルを推計するためには、施設の劣化状態に関する時系列データを蓄積することが必要となる。いま、ある土木施設の劣化に関する履歴が図-3に示すように与えられたとする。同図は、施設が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。現実には、施設の劣化過程には不確実性が含まれ、しかも劣化状態は時間軸上の限られた時刻で実施される測定を通じてのみ知ることができる。図中、時刻 $\tau$ はカレンダー上の実時刻(以下、時刻と呼ぶ)を表す。時刻 $\tau_0$ で土木施設の使用が開始された直後から劣化が始まる。2. (2) で議論したように、施設の劣化状態は $I$ 個の健全度で記述される。施設の健全度を表す状態変数を $i$  ( $i = 1, \dots, I$ )で表現しよう。施設がもっとも健全な(劣化が進展していない)状態を $i = 1$ で表し、状態変数 $i$ の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。 $i = I$ の場合、当該施設が使用限界に到達していることを表す。図中の時刻 $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ )において、健全度が $i$ から $i + 1$ に移行している。しかし、測定は同図における2つの時刻 $\tau_A, \tau_B$ において実施される。したがって、測定者が獲得できる情報は、測定時刻における健全度のみであり、健全度が推移した時刻 $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ )に関する情報は得られない。

#### (2) マルコフ劣化モデル

土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルを用いて表現しよう。いま、2つの時刻間における真の健全度間の推移状態をマルコフ推移確率で表現する。時刻 $\tau_A$ における真の健全度を状態変数 $m^*(\tau_A)$ を用いて表そう。時刻 $\tau_A$ における真の健全度が $i$  ( $i = 1, \dots, I$ )であれば $m^*(\tau_A) = i$ と表せる。マルコフ推移確率は、時刻 $\tau_A$ で測定された真の健全度 $m^*(\tau_A) = i$ を与件とし、将来時刻(たとえば $\tau_B$ )において真の健全度 $m^*(\tau_B) = j$ が生起する条件付推移確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[m^*(\tau_B) = j | m^*(\tau_A) = i] = \pi_{ij} \quad (1)$$

と表せる。このような推移確率を真の健全度ペア( $i, j$ )

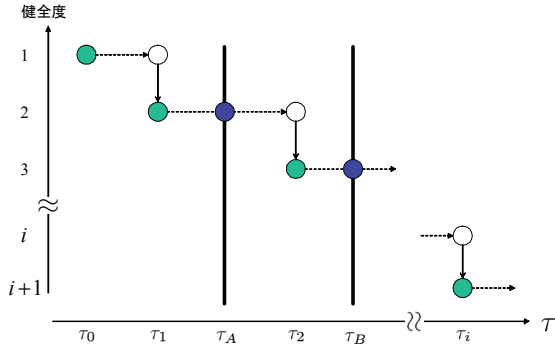


図-3 劣化過程

に対して求めれば、マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定義できる。マルコフ推移確率(1)は所与の2つの時刻 $\tau_A, \tau_B$ の間において生じる真の健全度間の推移確率を示したものであり、当然のことながら、対象とする測定間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0 (i > j)$ が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} &\geq 0 (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} &= 0 (i > j \text{の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が成立しなければならない。状態Iは、補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立すると考える。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される。マルコフ推移確率モデルでは、真の健全度が $i-1$ から $i$ に推移した時刻に関わらず、測定時刻 $\tau_A$ から測定時刻 $\tau_B$ の間に推移する確率は時刻 $\tau_A$ における真の健全度だけに依存するという性質(マルコフ性)を満足する。

### (3) 多段階指数ハザードモデル

マルコフ推移確率は、多段階指数ハザードモデルを用いて推計できる。本研究では、津田等<sup>10)</sup>が開発した多段階指数ハザードモデルを用いるが、読者の便宜を図るためモデルの概要を説明しておく。いま、真の健全度 $i (i = 1, \dots, I-1)$ の寿命を確率変数 $\zeta_i$ で表す。真の健全度 $i$ の寿命が、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。時刻 $\tau_A$ における真の健全度 $i$ であり、そこから時間 $y_i$ が経過した時刻で真の健全度 $i+1$ に到

達する確率密度をハザード関数<sup>17),18)</sup> $\lambda_i(y_i)$ を用いて表現する。この時、ハザード関数は、供用時間 $y_i$ まで真の健全度が $i$ のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて、

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{f_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (4)$$

と表せる。すなわち、ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は、初期時刻から時間 $y_i$ が経過するまで真の健全度 $i$ の状態が継続したという条件の下で、期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に真の健全度 $i+1$ に進展する条件付確率である。ハザード関数がサンプル時間軸上の時刻 $y_i$ に依存せず、常に一定値 $\theta_i > 0 (i = 1, \dots, I-1)$ をとる場合、指数ハザード関数

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \quad (5)$$

が成立する。指数ハザード関数を用いることにより、劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる。さらに、指数ハザード関数を用いれば、真の健全度 $i$ の寿命が $y_i$ 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は、

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i) \quad (6)$$

と表現できる。

さらに、サンプル時間軸上の $\tau_A$ で、真の健全度が $i$ であり、かつ時刻 $\tau_A$ から追加的に $z (\geq 0)$ 以上にわたって真の健全度 $i$ が継続する確率 $\tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A) &= \text{Prob}\{\zeta_i \geq \tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A\} \\ &= \frac{\exp\{-\theta_i(\tau_A + z)\}}{\exp(-\theta_i\tau_A)} = \exp(-\theta_i z) \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。すなわち、測定時刻 $\tau_A$ において真の健全度が $i$ と判定され、次の測定時刻 $\tau_B = \tau_A + z$ においても真の健全度が $i$ と判定される確率は、

$$\text{Prob}[m^*(\tau_B) = i | m^*(\tau_A) = i] = \exp(-\theta_i z) \quad (8)$$

となる。ただし、 $z$ は2つの測定時刻の間隔を表す。確率 $\text{Prob}[m^*(\tau_B) = i | m^*(\tau_A) = i]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{ii}(z)$ にほかならない。指数ハザードを用いた場合、推移確率 $\pi_{ii}(z)$ はハザード関数 $\theta_i$ と測定間隔 $z$ のみに依存し、時刻 $\tau_A, \tau_B$ に関する情報を用いなくとも推移確率を推計することが可能となる。以上の議論を拡張し、指数ハザード関数を用いて、測定時刻 $\tau_A$ と $\tau_B = \tau_A + z$ の間で真の健全度が $i$ から $j (> i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z) (i = 1, \dots, I-1; j = i, \dots, I)$ は、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z) &= \text{Prob}[m^*(\tau_B) = j | m^*(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &(i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I) \end{aligned} \quad (9)$$

と表すことができる<sup>10)</sup>。ただし、表記上の規則として、

$$\begin{cases} \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} = 1 & (k = i \text{の時}) \\ \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} = 1 & (k = j \text{の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned} & \prod_{m=i, \neq k}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &= \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \end{aligned}$$

と簡略化する．また， $\pi_{iI}$ に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$\pi_{iI}(z) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z) \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (10)$$

#### (4) 期待劣化曲線

土木施設の劣化特性は，施設的环境条件や構造・機能的な特性に依存して変化する．多段階指数ハザードモデルを用いれば，土木施設の特性別にマルコフ推移確率を求めることができる．いま，多段階指数ハザードモデルのハザード率 $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, I-1$ )を施設特性 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$ を用いて次式により表そう．

$$\theta_i = \theta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'_i \quad (11)$$

ただし， $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{iM})$ は未知パラメータ $\beta_{im}$  ( $m = 1, \dots, M$ )の行ベクトルである．記号 $\prime$ は転置操作を表す．劣化推移確率はデータが観察された測定間隔 $z$ に依存する．したがって，推移確率 $\pi_{ij}$ を目視測定による実測データ $(z, \mathbf{x})$ と未知パラメータ $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{I-1})$ の関数として $\pi_{ij}(z, \mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$ と表すことができる．なお，施設特性ベクトル $\mathbf{x}$ は，対象とする測定間隔に対して定義される変数である．同一の施設でも，たとえば交通量のように，対象期間によって異なる値をとる値も採用することができる．この場合，異なる測定間隔に対して，施設特性変数の値が異なることになる．さらに，ハザード率 $\theta_i(\mathbf{x})$ を用いた生存関数を $\tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\mathbf{x}))$ と表記する．生存関数 $\tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\mathbf{x}))$ が式(6)で表されることに留意すれば，特性 $\mathbf{x}$ を有する土木施設が，健全度 $i$ にはじめて到達した時刻から，劣化が進展して次の健全度に進むまでの期待期間長(以下，健全度期待寿命と呼ぶ) $RMD_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, \dots, I-1$ )は，

$$\begin{aligned} RMD_i(\mathbf{x}) &= \int_0^\infty \tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\mathbf{x})) dy_i \\ &= \int_0^\infty \exp\{-\theta_i(\mathbf{x})y_i\} dy_i = \frac{1}{\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'_i} \quad (12) \end{aligned}$$

と表される．土木施設の補修直後の健全度を $i = 1$ としよう．この時，初期時刻の健全度 $i = 1$ の状態から劣化が進行し，健全度が $j$  ( $> 1$ )に推移するまでに要する平均的経過時間 $ET_j(\mathbf{x})$  ( $j = 2, \dots, I$ )は

$$ET_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^j \frac{1}{\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'_i} \quad (13)$$

と表される． $ET_j(\mathbf{x})$  ( $j = 2, \dots, I$ )は，直近の補修時刻から健全度 $j$ に到達するまでの平均的な経過時間を表

す．本研究では，健全度 $j$  ( $j = 1, \dots, I$ )と平均的経過時間 $ET_j(\mathbf{x})$ の関係を期待劣化曲線と呼ぶ．

## 4. 隠れマルコフ劣化モデルの定式化

### (1) 隠れマルコフ劣化モデル

隠れマルコフ連鎖モデルは，測定される状態変数に誤差が介在するようなマルコフ連鎖モデルである．隠れマルコフ連鎖に関する理論的研究に関しては研究の蓄積があり，いくつかの成書<sup>19)</sup>で詳細に紹介されている．しかし，隠れマルコフ連鎖の推計方法に関しては，のちに4. (3)で言及するような困難性が存在するため，十分な研究が蓄積されていない．そのため，隠れマルコフ連鎖モデルの適用事例もそれほど多くない．近年になり，時系列モデルに関する研究の発展とともに，動的混合分布モデルと呼ばれる時系列統計モデルに関する研究が進展した．隠れマルコフ連鎖モデルは，動的混合分布モデルの中で，レジーム遷移(regime switching)モデルと類似の確率構造を有している．このため，レジーム推移モデルの推計方法を，隠れマルコフ連鎖モデルの推計にも適用できることが判明した．

レジーム遷移モデルは，Hamilton<sup>20)</sup>によって提案され，景気分析や金融計量経済学の分野で応用研究が急速に進展しつつある．レジーム遷移モデルでは，時系列データの構造変化を，レジーム間の推移現象として把握し，レジーム間推移確率を非線形時系列モデルとして定式化する<sup>21)</sup>．たとえば，Hamilton<sup>20)</sup>は，レジーム間の推移確率過程をMarkov過程で表現したようなマルコフ遷移モデルを提案している<sup>22)</sup>．マルコフ遷移モデルは，時系列データの推移過程をマルコフ連鎖を用いて表現するモデルである．マルコフ遷移モデルの推計方法の発展により，隠れマルコフ連鎖モデルの推計上の困難性も克服されることが判明した．とりわけ，MCMC(Markov Chain Monte Carlo: マルコフ連鎖モンテカルロ)法の発展が，マルコフ遷移モデルの推計に大きく貢献している．すでに，MCMC法を用いた隠れマルコフ連鎖モデルの推計方法に関しても，いくつかの研究事例がある<sup>23)</sup>．しかし，これらの既往研究では，マルコフ推移確率を直接求めることを目的としており，2. (1)で言及した集計的手法に属する．本研究では，非集計的方法でマルコフ推移確率を求めることを目的としており，このような立場から隠れマルコフ連鎖モデルを推計する研究事例は他に見当たらない．

### (2) 混合分布モデル

土木施設の劣化過程は不確実であり，マルコフ劣化モデル(2)に従うと考えよう．時間軸上の時刻 $\tau_A$ において測定が実施され，対象施設の見かけの健全度 $m(\tau_A) =$

$m$  ( $m = 1, \dots, I$ ) が測定されたとする. ただし, 測定結果に誤差が含まれるため, 測定された見かけの健全度  $m$  が, 真の健全度  $m^*(\tau_A) = i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) に一致しているかどうかは判らない. いま, 時刻  $\tau_A$  における真の健全度が  $m^*(\tau_A) = i$  であると仮定しよう. この時, 見かけの健全度  $m(\tau_A) = m$  が測定される確率分布を  $f_i(m|\alpha_i)$  と表そう.  $\alpha_i$  は, 確率分布  $f_i(m|\alpha_i)$  を特徴づけるパラメータベクトルである. 以下, この確率分布を条件付システム誤差分布と呼ぶ. 条件付システム誤差分布は, 真の健全度ごとに定義される. 条件付システム誤差分布  $f_i(m|\alpha_i)$  は, 時間に依存しないと仮定する. ここで, 測定者にとって, 真の健全度  $i$  が不確実であることに留意しよう. すなわち, 測定された見かけの健全度が, いずれの条件付システム誤差分布  $f_i(m|\alpha_i)$  ( $i = 1, \dots, I$ ) から発生されたサンプルなのか不確実である. ここで, 見かけの健全度  $m(\tau_A) = m$  が測定される尤度  $\ell(m(\tau_A) = m)$  を

$$\ell(m(\tau_A) = m) = \sum_{i=1}^I \pi_i(\tau_A) f_i(m|\alpha_i) \quad (14)$$

と表そう.  $\pi_i(\tau_A)$  は時刻  $\tau_A$  における真の健全度  $i$  が発生する確率である. したがって,  $\pi_i(\tau_A) f_i(m|\alpha_i)$  は, 互いに排反な  $I$  個の原因のうち, 原因  $i$  によって事象  $m(\tau_A) = m$  が発生する確率を表している. このように, 式(14)は, 複数の条件付システム誤差分布を加重平均した確率分布を表しており, 混合分布モデル (mixture distribution model)<sup>24)</sup> と呼ばれる.

つぎに, 2つの測定時刻  $\tau_A, \tau_B$  ( $\tau_A < \tau_B$ ) に着目し, 時刻  $\tau_A$  に見かけの健全度  $m(\tau_A) = m$  が測定され, かつ時刻  $\tau_B = \tau_A + z$  に, 見かけの健全度  $m(\tau_B) = n$  が同時に測定される尤度  $\ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n)$  を再帰的に定義しよう. まず, 時刻  $\tau_A$  で真の健全度が  $i$  であることが判明しているときに, 時刻  $\tau_B$  で見かけの健全度  $m(\tau_B) = n$  が測定される条件付尤度  $\ell_i(m(\tau_B) = n)$  は

$$\ell_i(m(\tau_B) = n) = \sum_{j=i}^I \pi_{ij}(z) f_j(n|\alpha_j) \quad (15)$$

と表される. しかし, 時刻  $\tau_A$  における真の健全度も観測できない. いま, 時刻  $\tau_A$  で真の健全度が  $i$  である確率を  $\pi_i(\tau_A)$  とすれば, 時刻  $\tau_B$  に, 見かけの健全度  $m(\tau_B) = n$  が測定される尤度  $\ell(m(\tau_B) = n)$  は

$$\begin{aligned} \ell(m(\tau_B) = n) &= \sum_{i=1}^I \pi_i(\tau_A) \ell_i(m(\tau_B) = n) \\ &= \sum_{i=1}^I \pi_i(\tau_A) \sum_{j=i}^I \pi_{ij}(z) f_j(n|\alpha_j) \end{aligned} \quad (16)$$

と表される. さらに, 時刻  $\tau_A$  において, 真の健全度が  $i$  の時に, 見かけの健全度  $m(\tau_A) = m$  が測定される確率が  $f_i(m|\alpha_i)$  で表されることより, 時刻  $\tau_A$  に見かけの健

全度  $m(\tau_A) = m$  が測定され, かつ時刻  $\tau_B$  に, 見かけの健全度  $m(\tau_B) = n$  が同時に測定される尤度  $\ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n)$  は

$$\begin{aligned} \ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n) \\ = \sum_{i=1}^I \pi_i(\tau_A) f_i(m|\alpha_i) \left( \sum_{j=i}^I \pi_{ij}(z) f_j(n|\alpha_j) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

と表される. 式(17)に示すように, 見かけの健全度  $m(\tau_A) = m$  と  $m(\tau_B) = n$  が抽出される確率  $f_i(m|\alpha_i)$ ,  $f_j(n|\alpha_j)$  は, 互いに, マルコフ推移確率  $\pi_{ij}(z)$  を通じて相関がある. すなわち, 時刻  $\tau_B$  における見かけの健全度の生起確率は, 「時刻  $\tau_A$  における見かけの健全度がどの確率密度から生成されたか」に依存しているため, 時間を通じて測定される見かけの健全度の時系列データは互いに独立にはならない.

### (3) 初期値問題

尤度(17)には, 真の健全度に関する初期分布  $\pi_i(\tau_A)$ , マルコフ推移確率  $\pi_{ij}(z)$ , 条件付システム誤差分布  $f_i(m|\alpha_i)$  という3種類の未知確率が存在する. このうち, 初期分布  $\pi_i(\tau_A)$  に関する先験的情報が存在しないという問題 (初期値問題と呼ぶ) がある. 初期値問題を克服する1つの方法は, 初期分布としてノンパラメトリック分布を与える方法がある. しかし, この方法によれば, 各対象施設に対して, 真の健全度の初期分布をパラメータベクトルで定義しなければならない. 対象施設ごとに, 異なるパラメータベクトルが定義されるため, 施設全体として膨大な数のパラメータが必要となる. 本研究では, 更新, 補修時刻で, 健全度が  $i = 1$  に回復すると考えよう. すなわち, 更新・補修直後の時刻  $\tau_0$  における初期値分布に関して

$$\begin{aligned} \pi(\tau_0) &= \{\pi_1(\tau_0), \dots, \pi_I(\tau_0)\} \\ &= (1, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (18)$$

が成立すると考える. このように, 更新・補修直後の時刻における初期値分布を設定することにより, 初期値問題を克服することが可能になる.

いま, 直近の補修・更新時刻  $\tau_0$  以降, 健全度が測定された時刻を  $\tau_1, \dots, \tau_T$  と表そう.  $T$  は直近の更新・補修以降の測定回数を表す. 時刻  $\tau_t$  に測定された見かけの健全度を  $m(\tau_t) = m_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) と表そう. さらに, 第  $t-1$  回目の測定と  $t$  回目の測定間隔を  $z_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) と表そう. この時, 測定間隔ベクトル  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_T)$  を与件とし, 健全度  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)$  が測定される尤度関数  $\mathcal{L}(\alpha, \mathbf{m}, \mathbf{z})$  を再帰的に定義すれば

$$\mathcal{L}(\alpha, \mathbf{m}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^I \pi_{1j}(z_1) f_j(m_1|\alpha_j) \ell_j(1) \quad (19a)$$

$$\ell_h(t) = \sum_{j=h}^I \pi_{hj}(z_t) f_j(m_t | \alpha_j) \ell_j(t+1) \quad (19b)$$

$$(1 \leq t \leq T-1)$$

$$\ell_h(T) = \sum_{j=h}^I \pi_{hj}(z_T) f_j(m_T | \alpha_j) \quad (19c)$$

と表される. 津田ら<sup>10)</sup>は, 多段階指数ハザードモデル(9)を最尤法を用いて推計する方法を提案している. しかし, 隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数(19a)-(19c)は最尤法に適さない性質を持っていることが知られている<sup>25)</sup>. 特に, 尤度関数が $\pi_{ij}(z)$ に関して高次の非線形多項式となっており, 1階の最適化条件が(複素数解を含めて)非常の多くの解を有している点にある. 当然のことながら, 推移確率 $\pi_{ij}(z)$ の推定値は実数解でなければならない. さらに, 推移確率であるため, 数ある実数解の中から, 0と1の間にある解を選択しなければならない. 最尤法の代わりにベイズ推計法を用いれば, 高次の非線形多項式を解く問題を回避できる. しかし, 尤度関数(19a)-(19c)が, 極めて多くの項を含んでおり, 計算量が膨大になってしまう欠点がある<sup>26)-29)</sup>. このような最尤法の難点を克服するために, 尤度関数の完備化操作が必要となる.

#### (4) 完備化操作

ある土木施設に対して, 測定時刻 $\tau_t$  ( $t = 1, \dots, T$ )において見かけの健全度 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)$ が測定できたと考えよう. さらに, 隠れマルコフ劣化モデルを推計するために, 見かけの健全度 $\mathbf{m}$ が, どの真の健全度を持つ条件付システム誤差分布から生成されたかを示す潜在変数ベクトル $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_T)$ を導入しよう. ただし, 劣化過程の性質より, 施設が補修されない限り,

$$s_0 = 1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_T \leq I \quad (20)$$

を満足する. 真の健全度は本来測定不可能であり, 潜在変数 $\mathbf{s}$ は, 本来測定不可能な変数である. 議論の便宜上, ひとまず潜在変数が仮に測定できたと考えよう. さらに, 潜在変数 $\mathbf{s}$ の測定結果に基づいて, ダミー変数

$$\delta_{ti} = \begin{cases} 1 & s_t = i \\ 0 & s_t \neq i \end{cases} \quad (21)$$

$$(t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

を導入しよう. 見かけの健全度 $\mathbf{m}$ , 潜在変数 $\mathbf{s}$ , 測定間隔 $\mathbf{z}$ を与件とした尤度関数(19a)-(19c)は

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{m}, \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^I \left\{ \pi_{1i}(z_1)^{\delta_{1i}} f_i(m_1 | \alpha_i)^{\delta_{1i}} \prod_{t=2}^T \prod_{j=i}^I \pi_{ij}(z_t)^{\delta_{t-1-i} \delta_{tj}} f_j(m_t | \alpha_j)^{\delta_{tj}} \right\}$$

$$= \prod_{t=1}^T \left\{ \pi_{s_{t-1}s_t}(z_t) f_{s_t}(m_t | \alpha_{s_t}) \right\}$$

$$= \prod_{t=1}^T \pi_{s_{t-1}s_t}(z_t) \prod_{t=1}^T f_{s_t}(m_t | \alpha_{s_t}) \quad (22)$$

と表現できる<sup>28)</sup>. 以上の操作を完備化(completion)と言う. 完備化された尤度関数(以下, 完備化尤度関数と呼ぶ)(22)は, 通常の尤度関数(19a)-(19c)より大幅に簡略化されていることが理解できる. ただし, 尤度関数(22)の中に含まれる潜在変数 $\mathbf{s}$ は, 測定できない変数である. そこで, 完備化尤度関数を用いて, 潜在変数の確率分布を推計することを考える. 完備化尤度関数を展開すれば, 潜在変数 $\mathbf{s}$ に関する全条件付事後分布(full conditional posterior distribution)を導出できる. 劣化過程の特性により, 補修が実施されない限り, 条件(20)が成立する. ここで,  $\mathbf{s}_{-t} = (s_1, \dots, s_{t-1}, s_{t+1}, \dots, s_T)$ ,  $\mathbf{s}_{-t}^i = (s_1, \dots, s_{t-1}, i, s_{t+1}, \dots, s_T)$ とすれば,  $s_t = i$  ( $i \in \{s_{t-1}, \dots, s_{t+1}\}$ )の全条件付事後確率は, ベイズの法則より

$$\text{Prob}\{s_t = i | \mathbf{s}_{-t}, \alpha, \xi\} = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{s}_{-t}^i, \alpha, \mathbf{m}, \mathbf{z})}{\sum_{i=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{s}_{-t}^i, \alpha, \mathbf{m}, \mathbf{z})} = \frac{\omega_{it} f_i(m_t | \alpha_i)}{\sum_{j=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \omega_{jt} f_j(m_t | \alpha_j)} \quad (23)$$

と表される. ただし,

$$\omega_{jt} = \begin{cases} \pi_{1j} \pi_{js_2} & t = 1 \\ \pi_{s_{t-1}j} \pi_{js_{t+1}} & 2 \leq t \leq T \\ \pi_{s_{T-1}j} & t = T \end{cases} \quad (24)$$

と表される. すなわち, 真の健全度間の推移確率 $\pi_{ij}(z)$  ( $i = 1, \dots, I; j = i, \dots, I$ )と条件付システム誤差分布 $f_i(m | \alpha_i)$  ( $i = 1, \dots, I$ )が求まれば,  $\mathbf{s}_{-t}$ を与件とした時刻 $t$ の真の健全度 $s_t \in \{s_{t-1}, \dots, s_{t+1}\}$ の全条件付事後確率を求めることができる. 完備化尤度関数(22)では, 潜在変数 $\mathbf{s}$ は確定的である. ただし, 条件付システム誤差分布, 真の健全度間の推移確率には未知パラメータ $\alpha, \beta$ が含まれており, 潜在変数に関する全条件付事後確率を先験的に求めることができない. 全条件付事後確率(23)を用いたMCMC法を用いて, 反復的に潜在変数 $\mathbf{s}$ をランダム発生させ, パラメータ $\alpha, \beta$ をベイズ推計することになる. これらの未知パラメータと全条件付き事後確率を求める方法についても, 5. (4)で改めてとりあげる. このような手続きにより, 完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推計値が, 真の尤度関数を用いて求めたパラメータの最尤推計値に収束することが証明されている<sup>24)</sup>.



(5) 条件付システム誤差分布

条件付システム誤差分布  $f_i(m|\alpha_i)$  は、真の健全度が  $m^*(\tau_t) = i$  の時に、見かけの健全度  $m(\tau_t) = m$  が測定される確率分布を表している。ただし、条件付システム誤差分布の関数形は、測定時刻  $\tau_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) に依存せず、時間を通じて一定であると仮定する。いま、対象とする施設の真の健全度が  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) であるとしよう。しかし、測定機器により測定される健全度が、真の健全度に一致する保証はない。健全度の測定結果にシステム誤差が介在し、見かけの健全度  $m$  ( $m = 1, \dots, i$ ) が測定されることになる。

測定結果にシステム誤差が介在する場合、真の健全度  $i$  と見かけの健全度  $m$  の間に  $m \leq i$  という関係が存在する。例えば、本研究の実証分析では、道路舗装の劣化問題をとりあげるが、ここでは単位道路区間内の3つの代表地点における健全度を測定し、その中でもっとも損傷が大きい地点の健全度により、当該区間の健全度として定義している。しかし、当該路区間におけるすべての地点における劣化事象を測定しているわけではないため、ランダムサンプリングにより測定した劣化事象が、当該道路区間においてもっとも損傷が進んだ劣化事象である保証はない。ここで、対象とする土木施設において、もっとも損傷が進んだ劣化状態で定義される真の健全度  $i$  に対して、見かけの健全度  $m$  が選択される確率を定義しよう。本研究では、このようなシステム誤差が右切断されたノンパラメトリックな離散的確率分布  $f_i(m|\alpha_i)$  ( $m = 1, \dots, i$ ) に従うと考える。すなわち、真の健全度が  $i$  の場合に、見かけの健全度が  $m$  ( $m \leq i$ ) となる確率  $f_i(m|\alpha_i)$  は

$$f_i(m|\alpha_i) = \begin{cases} 0 & m > i \text{ の時} \\ \alpha_m^i & m \leq i \text{ の時} \end{cases} \quad (25)$$

と表される。ただし、 $\alpha_m^i$  は定数であり、

$$0 \leq \alpha_m^i \leq 1 \quad (26a)$$

$$\sum_{m=1}^i \alpha_m^i = 1 \quad (26b)$$

を満足する。誤差発生メカニズム(25)にノンパラメトリックな条件付システム誤差分布を仮定しているため、サンプル数が十分であれば、条件付システム誤差分布の特定化誤差を回避することができる。隠れマルコフ劣化モデルを推計する場合、システム誤差パラメータ  $\alpha_m^i$  を直接推計することとなる。

なお、測定誤差には、システム誤差だけでなく、ランダム誤差も存在する。しかし、識別性問題が存在するために、両者を分離計測することは困難である。両者の測定誤差を分離計測する1つの方法は、例えば、確率的フロンティア理論で採用されているように、これらの2種類の誤差項の間に構造的関係を想定すること

が必要となる<sup>30),31)</sup>。そのためには、両者の誤差分布をパラメトリックな条件付誤差分布で表現し、両者の関係構造を明示的にモデル化することが必要となる。しかし、現時点においては、誤差発生メカニズムに関する先験的情報が存在せず、本研究ではノンパラメトリックな条件付システム誤差分布を用いている。測定誤差の分離計測の問題に関しては、誤差発生メカニズムに関する知見の蓄積を待たざるを得ない。

5. 推計方法

(1) MCMC 法

伝統的なベイズ統計学では、共役な事前・事後分布を用いて、パラメータを推計する方法が採用される<sup>23)</sup>。しかし、ハザードモデルの場合、簡単な指数ハザードモデルを用いても、共役事前確率分布が存在しないことが知られている<sup>32)</sup>。共役事前確率分布が存在しない場合、数値解析により多重積分を求めることが必要となる。このことが、ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に、大きな障害になっていた。しかし、近年、MCMC法<sup>23)</sup>がベイズ統計学の分野に導入され、多重数値積分により基準化定数を求めなくても、効率的に事後分布を求めることが可能となった。その結果、ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる。すでに、MCMC法を用いたベイズ推計法に関して、いくつかの研究が蓄積されている<sup>23)</sup>。代表的なMCMC法として、ギブスサンプリング (Gibbs sampling) 法、メトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings : MHと略す) 法等が提案されている<sup>23)</sup>。この内、ギブスサンプリングはもともと画像復元のアルゴリズム<sup>33)</sup>として知られていたが、ベイズ推計法における事後分布の推計に応用された<sup>34)</sup>。ギブスサンプリング法、MH法は、いずれも事後確率密度関数を直接求めることが難しい場合に、各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて、反復的にパラメータ  $\beta$  のサンプルを乱数発生させることにより、事後分布からパラメータサンプルを獲得する方法である。すでに、筆者等はMCMC法を用いて、マルコフ推移確率を効率的にベイズ推計することを明らかにしている。本研究では、筆者等が提案したワイブル劣化モデルのベイズ推計法<sup>13)</sup>を拡張し、MCMC法を用いてシステム誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法を提案する。

隠れマルコフ劣化モデルを含む混合分布モデルの推計では、前述したように尤度関数が特殊な形をしているため、通常の最尤法やベイズ推計法を用いることが困難である<sup>25),26)</sup>。このようなことから、混合分布モデルの推計方法として、通常の尤度関数ではなく、完備化尤度関数を定義するとともに、MCMC法を用いて混

合分布モデルを推計する方法が提案されている<sup>24)-27)</sup>. しかし、既往の隠れマルコフ劣化モデルでは、マルコフ推移確率が定数で与えられ、これらの定数パラメータを集計的に推計するに留まっている. しかし、本研究では、**3.** で言及したように、多段階指数劣化ハザードモデルを用いて、マルコフ推移確率を推計する点に特徴がある. このような隠れマルコフ劣化モデルを推計するためには、既往の隠れマルコフ劣化モデルを推計するためのMCMC法の中に、マルコフ推移確率のベイズ推計アルゴリズムを内包したようなMCMCアルゴリズムを開発することが必要になる.

**(2) 完備化尤度関数の定式化**

土木施設  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) に対して、直近の更新時刻以降、それぞれ合計  $T^k$  回にわたる測定結果が得られたとしよう. 測定時刻  $\tau_t^k$  ( $t = 1, \dots, T^k$ ) において測定された見かけの健全度の測定値を  $\bar{m}(\tau_t^k)$  と表す. ここに、記号  $\bar{\cdot}$  は、測定値であることを表す. また、 $\sum_{k=1}^K T^k$  個の測定情報に関するデータを  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^K)$  と表そう. ただし、 $\bar{\xi}^k = (\bar{\xi}_1^k, \dots, \bar{\xi}_{T^k}^k)$  である. また、 $\bar{\xi}_t^k = (\bar{m}_t^k, \bar{z}_t^k, \bar{\mathbf{x}}_t^k)$  であり、 $\bar{m}_t^k$  は時刻  $\tau_t^k$  における施設  $k$  の見かけの健全度、 $\bar{z}_t^k = \tau_t^k - \tau_{t-1}^k$  は測定時刻  $\tau_t^k$  と  $\tau_{t-1}^k$  の間の測定間隔、 $\bar{\mathbf{x}}_t^k$  は、時刻  $\tau_t^k$  における土木施設  $k$  の特性ベクトルである. この時、隠れマルコフ劣化モデルの完備化尤度関数は  $K$  個の土木施設から得られたデータの完備化同時生起確率

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\beta}, \bar{\xi}) &= \prod_{k=1}^K \left\{ \prod_{t=1}^{T^k} \pi_{s_{t-1}^k s_t^k}(z_t^k) \prod_{t=1}^{T^k} f_{s_t^k}(\bar{m}_t^k | \boldsymbol{\alpha}_{s_t^k}) \right\} \\ &= \prod_{k=1}^K \left[ \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k} \sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k} \left\{ \prod_{i=s_{t-1}^k, i \neq l}^{l-1} \frac{\theta_i^k}{\theta_i^k - \theta_l^k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp(-\theta_l^k z_t^k) \right\} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

で表される. ただし、 $\theta_i^k = \exp(\mathbf{x}^k \boldsymbol{\beta}_i')$  と表される. したがって、尤度関数 (19a)-(19c) を最大にするような最尤推定量を求める問題は、尤度関数 (27) を用いて、未知パラメータベクトル  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{I-1})$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{I-1})$ , 潜在変数ベクトル  $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^K)$  を最尤推計する問題に帰着される. なお、パラメータベクトル  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  を与件とすれば、潜在変数  $s_t^k$  ( $t = 1, \dots, T^k; k = 1, \dots, K$ ) の全条件付事後分布を求めることができる. ここで、 $\mathbf{s}_{-t}^k = (s_1^k, \dots, s_{t-1}^k, s_{t+1}^k, \dots, s_{T^k}^k)$  とすれば、 $s_t^k$  ( $s_t^k \in \{s_{t-1}^k, \dots, s_{t+1}^k\}$ ) の全条件付事後確率は、

$$\text{Prob}\{s_t^k = i | \mathbf{s}_{-t}^k, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}\}$$

$$= \frac{\omega_{it}^k f_i(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_i)}{\sum_{j=s_{t-1}^k}^{s_{t+1}^k} \omega_{jt}^k f_j(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_j)} \quad (28)$$

と表される. ただし、

$$\omega_{jt}^k = \begin{cases} \pi_{1j} \pi_{js_2} & t = 1 \\ \pi_{s_{t-1}^k j} \pi_{js_{t+1}^k} & 2 \leq t \leq T^k \\ \pi_{s_{T^k-1}^k j} & t = T^k \end{cases} \quad (29)$$

である.

**(3) ベイズ推計法**

一般に、ベイズ推計法は、1) 事前の経験情報などに基づいて、パラメータ  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  の事前確率密度関数を設定する. 2) 新しく獲得したデータ  $\boldsymbol{\xi}$  に基づいて尤度関数  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi})$  を定義する. さらに、3) ベイズの定理に基づいて事前確率密度関数を修正し、パラメータ  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  に関する事後確率密度関数  $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\xi})$  を得る、という手順を採用することになる. 以上の手順を、本研究ではベイズ推計ルールと呼ぶ. 最尤法と異なり、未知パラメータ  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  の確率分布が、事後分布として求まる点にベイズ推計法の特徴がある. 前述したように、ハザードモデルでは、共役事前確率密度関数を見出すことは不可能<sup>32)</sup> であり、事前確率密度関数は、非共役事前確率密度関数を採用せざるを得ない. 事前確率密度関数設定には、任意性が介在せざるを得ないが、サンプル数が増加するにつれて事前確率密度関数の特定化の影響は次第に低下する.

まず、条件付システム誤差分布関数 (25) に含まれるパラメータ  $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_i^i)$  は、式 (26a),(26b) を満足する定数である. これらの定数の事前確率密度関数として、ディリクレ分布を仮定しよう. すなわち、パラメータ  $\boldsymbol{\alpha}_i$  の事前確率密度関数を

$$\eta_i(\boldsymbol{\alpha}_i | \boldsymbol{\nu}^i) = \Psi_i(\boldsymbol{\nu}^i) \prod_{m=1}^i (\alpha_m^i)^{\nu_m^i - 1} \quad (30)$$

$$\Psi_i(\boldsymbol{\nu}^i) = \frac{\Gamma(\nu_1^i + \dots + \nu_i^i)}{\Gamma(\nu_1^i) \dots \Gamma(\nu_i^i)}$$

$$\sum_{m=1}^i \alpha_m^i = 1$$

と表現する. ただし、 $\boldsymbol{\nu}^i = (\nu_1^i, \dots, \nu_i^i)$  は定数パラメータベクトルである.  $\boldsymbol{\alpha}_i$  がディリクレ分布に従う場合、これらのパラメータは自動的に式 (26a),(26b) を満足する. つぎに、 $\boldsymbol{\beta}_i$  の事前確率密度関数が、標準的な事前確率密度関数として用いられる多次元正規分布に従うと仮定しよう. すなわち、 $\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$  である. ただし、 $M$  次元正規分布  $\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$  の確率密度関数は、

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\beta}_i | \boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_i|}} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i)' \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ただし、 $\zeta_i$ は $\mathcal{N}_M(\zeta_i, \Sigma_i)$ の事前期待値ベクトル、 $\Sigma_i$ は事前分散共分散行列である。この時、完備化事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | s, \xi)$ は、

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \beta | s, \xi) &\propto \tilde{L}(\alpha, \beta, s, \xi) \prod_{i=1}^{I-1} \left\{ h(\beta_i | \mu_i, \Sigma_i) \right. \\ &\quad \left. \eta_i(\alpha_i | \nu^i) \right\} \\ &\propto \prod_{k=1}^K \left[ \prod_{t=1}^{T^k} \sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k} \left\{ \prod_{i=s_{t-1}^k, \neq l}^{l-1} \frac{\theta_i^k}{\theta_i^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z_t^k) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)' \right\} \\ &\quad \cdot \left( \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k} \right) \left( \prod_{i=1}^I \prod_{m=1}^i (\alpha_m^i \nu_m^i - 1) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。

#### (4) ギブスサンプリング

隠れマルコフ劣化モデルでは、事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \xi)$ を直接解析的に求めることができない。そこで、代表的なMCMC法であるギブスサンプリング法<sup>33)</sup>を用いて、パラメータ $\alpha, \beta$ の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する。式(32)において、 $\alpha, \beta$ は互いに独立であり、これらのパラメータの完備化条件付事後密度関数 $\rho(\alpha | s, \xi), \rho(\beta | s, \xi)$ は

$$\begin{aligned} \rho(\alpha | s, \xi) &\propto \left( \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k} \right) \\ &\quad \left\{ \prod_{i=1}^I \prod_{m=1}^i (\alpha_m^i \nu_m^i - 1) \right\} \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \rho(\beta | s, \xi) &\propto \left\{ \prod_{k=1}^K \left[ \prod_{t=1}^{T^k} \sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \prod_{i=s_{t-1}^k, \neq l}^{l-1} \frac{\theta_i^k}{\theta_i^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z_t^k) \right] \right\} \\ &\quad \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)' \right\} \end{aligned} \quad (33b)$$

と表せる。また、潜在変数 $s$ の全条件付事後分布は式(28)で表される。以上のギブスサンプラーを用いたMCMC法により、隠れマルコフ劣化モデルを推計することが可能となる。図-4に、隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計するための具体的手順を整理している。読者の便宜を図るために、同図中には、推計法の詳細を説明する節番号や式番号を明記している。以下では、以上の各ステップの内容を、より詳細に説明する。

##### a) ステップ1 初期値設定

事前分布(30),(31)のパラメータベクトル(行列) $\nu^i (i = 1, \dots, I), \zeta_i, \Sigma_i (i = 1, \dots, I-1)$ の値を任意に

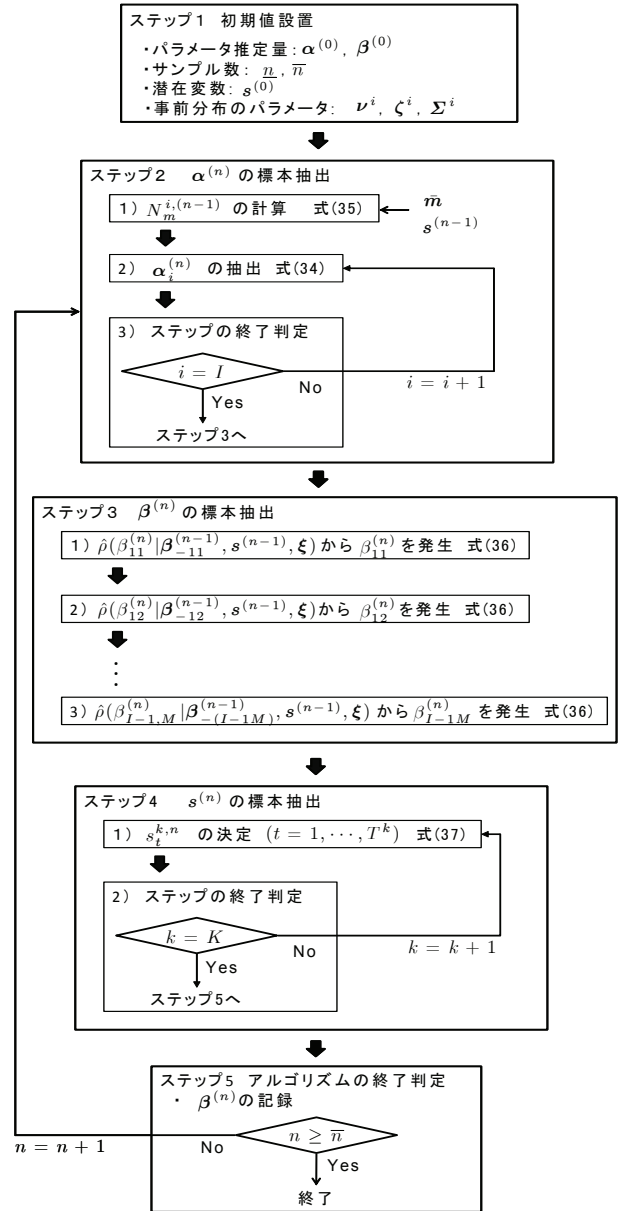


図-4 隠れマルコフ劣化モデルのベイズ推計法

設定する。潜在変数の初期値 $s^{(0)} = (s^{(1,0)}, \dots, s^{(K,0)})$ を設定する。ただし、 $s^{(k,0)} = (s_1^{k,0}, \dots, s_T^{k,0})$ であり、 $1 \leq s_1^{k,0} \leq \dots \leq s_T^{k,0} \leq I, m_t^k \leq s_t^{k,0} (t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K)$ を満足する。さらに、パラメータ推計量の初期値 $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$ を任意に設定する。これらの初期値の影響は、MCMC法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ、次第に薄れていく。MCMCのサンプル標本回数 $n$ を $n = 1$ とする。

##### b) ステップ2 パラメータ $\alpha^{(n)}$ の標本抽出

ステップ2では、潜在変数 $s^{(n-1)}$ を与件とし、条件付システム誤差分布のパラメータ $\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{I-1}^{(n)})$ に関するパラメータ標本を獲得する。ただし、 $\alpha_i^{(n)} = (\alpha_m^{i,n} : m = 1, \dots, i)$ と表記する。ステップ2で用いる

ギブスサンプラーは式(33a)で表される完備化条件付事後密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}|\mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ で与えられる。真の健全度 $\mathbf{s}^{(n-1)}$ と測定データ $\boldsymbol{\xi}$ を与件としたとき、完備化された $\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}$ に関するギブスサンプラーを

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}(\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}|\mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi}) \\ & \propto \left\{ \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^{k,(n-1)}} \right\} \left\{ \prod_{m=1}^i (\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i - 1} \right\} \\ & = \prod_{m=1}^i (\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i + N_m^{i,(n-1)} - 1} \end{aligned} \quad (34)$$

と表すことができる。ただし、 $N_m^{i,(n-1)}$ は見かけの健全度の測定値 $\bar{m}$ と潜在変数 $\mathbf{s}^{(n-1)}$ を与件とした時、

$$N_m^{i,(n-1)} = \#\{\bar{m}_t^k = m \cap s_t^{k,(n-1)} = i\} \quad (35)$$

と定義される。ただし、 $\#\{\}$ は、括弧 $\{\}$ 内に含まれる定義式が成立するような測定サンプル数を表す。式(34)は、パラメータ $\nu_m^i + N_m^{i,(n-1)} - 1$ を有するディリクレ分布に他ならない。更新されたディリクレ分布(34)を用いて、ギブスサンプリングにより、条件付システム誤差分布のパラメータ標本 $\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)} = (\alpha_1^{i,(n)}, \dots, \alpha_i^{i,(n)})$ を標本抽出する。すべての $i$  ( $i = 1, \dots, I$ )に対してパラメータ標本 $\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}$ を求める。

c) ステップ3 パラメータ $\boldsymbol{\beta}^{(n)}$ の標本抽出

ステップ3では、真の健全度で定義される多段階指数ハザードモデルのパラメータ標本を抽出する。ステップ3のアルゴリズムを説明するために、未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ から第 $(e, q)$  ( $e, q = 1, \dots, M$ )要素 $\beta_{eq}$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\beta}_{-eq}$ と表そう。この時、式(33b)より、 $\boldsymbol{\beta}_{-eq}$ を既知とした時の $\beta_{eq}$ の条件付き事後確率密度関数 $\rho(\beta_{eq}|\boldsymbol{\beta}_{-eq}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi})$ は

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}(\beta_{eq}|\boldsymbol{\beta}_{-eq}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}) \\ & \propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^I \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \left\{ \prod_{l=i}^{j-1} (\theta_l^k)^{\delta_{ij}^{tk} - \delta_{ie}^{tk}} \sum_{h=i}^j \right. \\ & \quad \cdot \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z_t^k) \left. \right\}^{\delta_{ij}^{tk}} \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i)' \right\} \\ & \propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^I \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \left[ \prod_{l=i}^{j-1} \{\exp(\beta_{eq} x_q^k)\}^{\delta_{ij}^{tk} - \delta_{ie}^{tk}} \right. \\ & \quad \left. \sum_{h=i}^j \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z_t^k) \right]^{\delta_{ij}^{tk}} \\ & \quad \exp \left\{ -\frac{\sigma_e^{qq}}{2} (\beta_{eq} - \hat{\zeta}_e^q)^2 \right\} \\ & \quad \hat{\zeta}_e^q = \zeta_e^q + \sum_{h=1, \neq q}^M (\beta_{eh} - \zeta_e^h) \sigma_e^{hq} \end{aligned} \quad (36)$$

と表せる。ただし、 $\delta_{ie}^{tk}$ ,  $\delta_{ij}^{tk}$ は

$$\delta_{ie}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i = e \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i, s_t^k = j \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となるダミー変数である。 $\zeta_e^q$ は事前期待値ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_e$ の第 $q$ 要素であり、 $\sigma_e^{hq}$ は事前分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_e^{-1}$ の第 $(h, q)$ 要素である。また、 $\sum_{h=1, \neq q}^M$ は1から $M$ までの要素のうち $q$ を除いた要素の総和を意味する。これらの条件付き確率密度関数から標本を発生させ、その標本を用いてパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の事後分布に関する各種の統計量を計算することができる。MCMC法から得られた標本を用いて、事後分布の各種統計量を求める方法については、5. (5)で述べる。このとき、 $\boldsymbol{\beta}^{(n)} = (\beta_{11}^{(n)}, \dots, \beta_{I-1M}^{(n)})$ を以下の手順でランダムサンプリングする。

- ・ステップ3-1  $\hat{\rho}(\beta_{11}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-11}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{11}^{(n)}$ を乱数発生する。
- ・ステップ3-2  $\hat{\rho}(\beta_{12}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-12}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{12}^{(n)}$ を乱数発生する。
- ・ステップ3-3 以下、同様の手順を繰り返す。
- ・ステップ3-4  $\hat{\rho}(\beta_{I-1M}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-(I-1M)}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{I-1M}^{(n)}$ を乱数発生する。

なお、ギブスサンプリングを行うためには $(I-1) \times M$ 個の条件付き事後確率密度関数 $\hat{\rho}(\beta_{eq}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-eq}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ を求めることが必要となる。本研究では、式(36)から事後分布のパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の標本をサンプリングする手法として、適応的棄却サンプリング<sup>35)</sup>を用いる。

d) ステップ4 潜在変数の更新

全条件付事後確率(28)に基づいて、新しい潜在変数 $\mathbf{s}^{(n)}$ をランダムサンプリングする。いま、潜在変数ベクトル $\mathbf{s}_{-t}^{k,(n-1)} = (s_1^{k,n}, \dots, s_{t-1}^{k,n}, s_{t+1}^{k,(n-1)}, \dots, s_{T^k}^{k,(n-1)})$ を定義する。この時、 $s_t^{k,n}$  ( $s_t^{k,n} \in \{s_{t-1}^{k,n}, \dots, s_{t+1}^{k,(n-1)}\}$ )の全条件付事後確率は、

$$\text{Prob}\{s_t^k = i | \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s}_{-t}^{k,(n-1)}, \boldsymbol{\xi}\} = \begin{cases} \frac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=1}^{s_{t-1}^{k,(n-1)}} \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} & (t = 1 \text{の時}) \\ \frac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^{s_{t+1}^{k,(n-1)}} \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} & (2 \leq t < T^k \text{の時}) \\ \frac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^I \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} & (t = T^k \text{の時}) \end{cases} \quad (37)$$

と表される。ただし、

$$\omega_{jt}^{k,(n-1)} = \begin{cases} \pi_{1j} \pi_{j s_2^{k,(n-1)}} & t = 1 \\ \pi_{s_{t-1}^{k,n}} \pi_{j s_{t+1}^{k,(n-1)}} & 2 \leq t < T^k \\ \pi_{s_{T^k-1}^{k,n}} & t = T^k \end{cases} \quad (38)$$

である。すべての  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) に対して、 $t = 1$  より逐次、潜在変数  $s_t^{k,n}$  ( $t = 1, \dots, T^k$ ) を求める。

**e) ステップ5 アルゴリズムの終了判定**

以上で求めたパラメータ推計量の更新値  $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ 、潜在変数の更新値  $s^{(n)}$  を記録する。  $n \leq \bar{n}$  の場合、  $n = n+1$  として、ステップ2へ戻る。そうでない場合、アルゴリズムを終了する。

なお、以上のアルゴリズムの初期段階においては、パラメータの初期値設定の影響が残存している。このため、シミュレーション回数  $n$  が十分大きな値になるまでは、パラメータ標本の発生過程が定常過程に到達していないと考え、発生したパラメータ標本を除去することが望ましい。ここで、パラメータ標本として採用するシミュレーション回数  $n$  の最小値を  $\underline{n}$  と表そう。すなわち、ギブスサンプリングで求めたサンプル  $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$  ( $n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n}$ ) を、事後確率密度関数  $\rho(\alpha, \beta | \xi)$  からの標本と見なすこととする。したがって、これらの標本を用いて、パラメータベクトル  $\alpha, \beta$  の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる。なお、ギブスサンプリングの定常性に関しては、次節で述べる Geweke の検定統計量を用いて判断することができる。

**(5) 事後分布に関する統計量**

MCMC法によって得られた標本に基づいて、パラメータベクトル  $\alpha, \beta$  に関する統計的性質を分析することができる。MCMC法を用いた場合、パラメータの事後確率密度関数  $\rho(\alpha, \beta | \xi)$  を解析的な関数として表現することはできない。得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる。いま、ギブスサンプリングから得られた標本を  $\theta^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$  ( $n = 1, \dots, \bar{n}$ ) と表そう。この内、最初の  $\underline{n}$  個の標本は収束過程からの標本と考え、標本集合から除去する。その上で、パラメータの標本添字集合を  $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$  と定義しよう。このとき、パラメータ  $\alpha$  および  $\beta$  の同時確率分布関数  $G(\alpha), G(\beta)$  は

$$G(\alpha) = \frac{\#(\alpha^{(n)} \leq \alpha, n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (39a)$$

$$G(\beta) = \frac{\#(\beta^{(n)} \leq \beta, n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (39b)$$

と表すことができる。ただし、 $\#(\beta^{(n)} \leq \beta, n \in \mathcal{M})$  は論理式  $\beta^{(n)} \leq \beta, n \in \mathcal{M}$  が成立するサンプルの総数である。また、パラメータ  $\beta_i$  の事後分布の期待値ベクト

ル  $\tilde{\zeta}_i(\beta_i)$ 、分散・共分散行列  $\tilde{\Sigma}_i(\beta_i)$  は、それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i(\beta_i) &= (\tilde{\zeta}(\beta_{i,1}), \dots, \tilde{\zeta}(\beta_{i,M}))' \\ &= \left( \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,1}^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,M}^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\tilde{\Sigma}_i(\beta_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}(\beta_{i,1}\beta_{i,M}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_{i,M}\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,M}) \end{pmatrix} \quad (40b)$$

と表される。ただし、

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_{i,m}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\beta_{i,m}\beta_{i,l}) &= \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\} \{\beta_{i,l}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\beta_{i,l})\}}{\bar{n} - \underline{n}} \end{aligned} \quad (41b)$$

である。また、ギブスサンプリングによる標本を用いて、パラメータ  $\alpha, \beta$  の信用区間を定義できる。たとえば、パラメータ  $\beta$  の  $100(1-2\epsilon)\%$  信用区間は、標本順序統計量  $(\underline{\beta}_{i,m}^\epsilon, \bar{\beta}_{i,m}^\epsilon)$  ( $i = 1, \dots, I-1, m = 1, \dots, M$ )

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{i,m}^\epsilon &= \arg \max_{\beta_{i,m}^*} \left\{ \frac{\#(\beta_{i,m}^{(n)} \leq \beta_{i,m}^*, n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \epsilon \right\} \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{i,m}^\epsilon &= \arg \min_{\beta_{i,m}^{**}} \left\{ \frac{\#(\beta_{i,m}^{(n)} \geq \beta_{i,m}^{**}, n \in \mathcal{M})}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \epsilon \right\} \end{aligned} \quad (42b)$$

を用いて  $\underline{\beta}_{i,m}^\epsilon < \beta_{i,m} < \bar{\beta}_{i,m}^\epsilon$  と定義できる。

MCMC法では、初期パラメータ値  $\theta^{(0)}$  が不変分布である事後分布からの標本である保証はない。ギブスサンプリングで発生させた  $\bar{n}$  個のサンプルの内、最初の  $\underline{n}$  個の標本  $\theta^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$  ( $n = 1, \dots, \underline{n}$ ) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える。その上で、第  $\underline{n} + 1$  回以降の標本をとりあげよう。  $\underline{n} + 1$  以降の標本が、不変分布である事後分布からの標本であるかどうかを Geweke の方法<sup>38)</sup>を用いて仮説検定を試みる。いま、パラメータのギブス標本  $\theta^{(n)}$  ( $n = 1, \dots, \bar{n}$ ) の中から、最初の  $n_1$  個と最後の  $n_2$  個のデータをとりあげよう。 Geweke は、  $n_1 = 0.1(\bar{n} - \text{underkinen}), n_2 = 0.5(\bar{n} - \text{underkinen})$  を推奨している<sup>38)</sup>。この時、パラメータ  $\alpha$  の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は、

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_m^i} &= \frac{1\bar{\alpha}_m^i - 2\bar{\alpha}_m^i}{\sqrt{\nu_1^2(\alpha_m^i) + \nu_2^2(\alpha_m^i)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (43) \\ 1\bar{\alpha}_m^i &= \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \alpha_m^{i,k}}{n_1} \quad 2\bar{\alpha}_m^i = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \alpha_m^{i,k}}{n_2} \end{aligned}$$

$$\nu_1^2(\alpha_m^i) = \frac{2\pi \hat{f}_{\alpha_m^i}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\alpha_m^i) = \frac{2\pi \hat{f}_{\alpha_m^i}^2(0)}{n_2}$$

と定義できる。ただし、 $f_{\alpha_m^i}^l(x)$  ( $l = 1, 2$ ) はスペクトル密度関数であり、 $2\pi f_{\alpha_m^i}^l(0)$  の推定値は

$$2\pi \hat{f}_{\alpha_m^i}^l(0) = l\hat{\omega}_0 + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) l\hat{\omega}_m^i \quad (44)$$

$$1\hat{\omega}_0 = n_1^{-1} \sum_{g=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} (\alpha_m^{i,g} - 1\bar{\alpha}_m^i)^2$$

$$2\hat{\omega}_0 = n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} (\alpha_m^{i,g} - 2\bar{\alpha}_m^i)^2$$

$$1\hat{\omega}_m^i = n_1^{-1} \sum_{g=\underline{n}+s+1}^{\underline{n}+n_1} (\alpha_m^{i,g} - 1\bar{\alpha}_m^i)(\alpha_m^{i,(g-s)} - 1\bar{\alpha}_m^i)$$

$$2\hat{\omega}_m^i = n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+s+1}^{\bar{n}} (\alpha_m^{i,g} - 2\bar{\alpha}_m^i)(\alpha_m^{i,(g-s)} - 2\bar{\alpha}_m^i)$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{q+1}$$

として求まる<sup>36), 37)</sup>。  $q$  はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが、Geweke に従って 20 を採用する<sup>38)</sup>。同様に、パラメータ  $\beta_{i,m}$  ( $i, m = 1, \dots, M$ ) に関しても Geweke 検定統計量を

$$Z_{\beta_{i,m}} = \frac{1\bar{\beta}_{i,m} - 2\bar{\beta}_{i,m}}{\sqrt{\nu_1^2(\beta_{i,m}) + \nu_2^2(\beta_{i,m})}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (45)$$

$$1\bar{\beta}_{i,m} = \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \beta_{i,m}^{(k)}}{n_1} \quad 2\bar{\beta}_{i,m} = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \beta_{i,m}^{(k)}}{n_2}$$

$$\nu_1^2(\beta_{i,m}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\beta_{i,m}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_{i,m}}^2(0)}{n_2}$$

と定義する。ここで、 $\alpha_m^i$  の不変分布への収束性に関する帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\alpha_m^i}| \leq z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\alpha_m^i}| > z_{\psi/2} \end{cases} \quad (46)$$

と設定しよう。ただし、 $z_{\psi/2}$  は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である。有意水準  $\psi\%$  で帰無仮説を仮説検定する場合、 $z_{\psi/2}$  は  $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$  を満足する値として定義できる。ただし、 $\Phi(z)$  は標準正規分布の分布関数である。同様に、 $\beta_{i,m}$  ( $i, m = 1, \dots, M$ ) に関しても、仮説検定を行うことができる。

## 6. 適用事例

### (1) データベースの概要

本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルを、M 県が管理する一般国道において過去 9 年間に実施された路面性状調査結果に適用し、道路舗装のわだち掘れ劣化予測を試みる。対象とするデータベースは、補修年度に関するデータと、路面性状の実測データにより構成されている。路面性状調査は、3 年もしくは 6 年間で

行われている。分析対象とする区間は、M 県に存在する一般国道のうち、M 県が管理する約 60km の区間であり、100m を単位区間として測定サンプルが蓄積されている。また、1986 年以降、現在に至るまで、高速測定車両による舗装のわだち掘れ測定を定期的実施している。本研究の適用事例で用いる管理データベースでは、1998 年から 2005 年に至る期間中に実施された路面性状調査データが記載されている。これらのデータの中で、適用事例では、アスファルト舗装のわだち掘れ過程に着目する。さらに、補修履歴データベースには、分析対象期間中に実施された道路舗装の補修に関する記録が蓄積されている。対象期間中に道路舗装の補修が実施された路面箇所に関しては、その時点初期時点とするサンプル時間軸を定義し、隠れマルコフ劣化ハザードモデル推計のためのデータベースを作成した。したがって、測定サンプルは、初期時点とそれ以降の連続する 2 つの測定時点におけるわだち掘れ量の実測値、および測定間隔に関する情報により構成されている。データベースには、個々の測定サンプルに関わる交通情報や、道路条件も記載されている。このようにして作成した測定サンプル数は、合計 5,261 個である。

一般に、土木施設の点検結果は、構造的・機能的判断を経て、離散的な健全度指標として表現される場合が多い。したがって、マルコフ連鎖モデルを用いて、劣化過程を表現することが可能である。しかし、本研究で用いる舗装のわだち掘れ量の実測データは連続値として記録されている。本研究で提案した劣化予測モデルを推計するためには、わだち掘れ量の連続値を離散的な健全度に置き換える必要がある。舗装マネジメントの実務では、連続値として観測されるわだち掘れ、ひび割れ、平坦性等の実測値を、技術的判断を加えて複数の離散的指標に変換することが多い。本研究でも、M 県の技術指針に従って、わだち掘れに関する健全度を、表-1 に示すような、5 段階のレーティングに分類した。当然のことながら、離散的なカテゴリー区分を変化させれば、劣化予測モデルの推計結果が異なる。しかし、舗装マネジメントの視点に立てば、わだち掘れ量が管理限界 (15mm, もしくは 20mm) に到達するまでの時間を予測することが重要である。筆者等は、表-1 に示すランクとは異なるレーティング方法を用いて、わだち掘れ量が管理限界までに到達する時間に関して感度分析を行っている。その結果、到達時間の予測結果に顕著な差異が見られなかったために、表-1 に示すような健全度レーティングを用いることとした。

いま、連続する 2 つの時点における健全度の実測値を、事前健全度、事後健全度と呼ぶこととする。多段階指数ハザードに用いる測定サンプルを、事前健全度と事後健全度に着目して整理した結果を表-2 に示して

**表-1** 健全度レーティング  
わだち掘れ量

ランク	わだち掘れ量
1	5mm 未満
2	5mm 以上 10mm 未満
3	10mm 以上 15mm 未満
4	15mm 以上 20mm 未満
5	20mm 以上

**表-2** サンプル数

事前健全度	事後健全度				
	1	2	3	4	5
1	331	339	32	5	0
2	573	1919	468	187	47
3	66	240	382	163	44
4	50	63	52	82	67
5	2	22	16	27	84

**表-3** パラメータの推計結果

健全度	定数項 $\beta_{i1}$	交通量 $\beta_{i2}$
1	0.280 (0.267,0.292)	0.415 (0.352,0.477)
2	1.915 0.033 (0.029,0.035)	1.154 0.188 (0.172,0.206)
3	0.543 0.108 (0.100,0.117)	1.128 - -
4	1.199 0.112 (0.101,0.121)	- - -
	0.753	-

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータサンプルの期待値、第2行はパラメータ推定値の95%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。

いる。同表の各行は、事前健全度*i*に、各列は事後健全度*j*に対応している。ここでは、2つの測定時点の間に、舗装の補修が実施されていないサンプルのみを抽出している。しかし、同表に示すように、事前健全度に対して、事後健全度が回復しているサンプルが多数存在している。特に、事前健全度が2の場合に事後健全度が1となるサンプルが多い。2つの時点間において、道路舗装の補修が実施されていないことを考慮すれば、分析で用いるデータには、数多くのシステムの誤差が介在していることが理解できる。

**(2) 推計結果**

以上のデータベースを用いて、舗装わだち掘れ量の劣化予測モデルを推計した。推計にあたっては、道路特性を表す説明変数として、車線区分、大型車交通量(1日当たり)、構造特性等を説明変数の候補としてとりあげた。これらの説明変数のうち、大型車交通量  $x_{i2}$  のみが、最終的に有意な説明力を有する変数として採用された。なお、説明変数  $x_{i2}$  は大型車交通量について異なる対象期間の中で最大の区間交通量の値を1として基準化したものである。大型車交通量以外の変数は、有意な説明力を持たないため、説明変数として選ばれていない。本研究では、M県の国道という単一の路線を対象としたわだち掘れ予測モデルを推計している。このため、舗装材料、施工時期等の説明変数は、モデル推計に用いる各サンプルを通じて同一の値をとっている。したがって、これらの舗装特性は、モデルの説明変数として選ばれていない。当然のことながら、推計したわだち掘れ予測モデルは、分析対象とした一般国道にのみ適用可能であることは言うまでもない。今後、環境条件が異なる多数の路線にも適用可能なわだち掘れ予測モデルを開発するためには、本適用事例で採択

されなかった変数を説明変数に加えたモデルを開発することが必要となる。

以上のデータに基づいて推計した隠れマルコフ劣化モデルのパラメータ推計値を、一括して**表-3**に示している。ここで、説明変数  $x_{i1} = 1$  は恒常的に値1をとり、 $\beta_{i1}$  は定数項を表す。同表の各健全度に対して、最上段に示す数値はMCMC過程で発生したパラメータサンプルの期待値を示している。本適用事例では、 $x_{i1}$ 、 $x_{i2}$  が説明変数として採用されている。同表に示すように、大型車交通量は、道路舗装のわだち掘れの発生と初期段階の進行に多大な影響を及ぼす。しかし、わだち掘れが進行した段階では、大型車交通量と関係なくわだち掘れが進行することがわかる。**表-3**の各健全度に対応する第2行には、式(42a),(42b)を用いて算定した有意水準95%に対応する信用域の下限値と上限値を示している。下限値と上限値を用いて定義される信用区間の中にパラメータ値0が含まれておらず、有意水準95%でパラメータ値は0でないと判断できる。最後に、**表-3**の各健全度の最下段の行には、Geweke検定統計量を示している。パラメータサンプリングにおいては、各パラメータに対して10万個のサンプルを発生させたが、はじめの2,000個のサンプルは定常過程への収束段階のサンプルと考え、パラメータの統計量算定の対象から除外した。同表に示すように、Geweke検定統計量の絶対値はいずれも1.96を下回っており、有意水準5%で「MCMC法によるパラメータサンプリング過程が定常状態に収束している」という仮説を棄却できない。つぎに、推計したシステム誤差分布を**図-5**に示している。同図は、真の健全度に対する見かけの健全度の確率分布  $f_i(m|\alpha_i)$  を示している。同図より、以下の事項が読み取れる。すなわち、真の健全度と見かけの健全度が一致する確率ももっとも大きい。健全度4、5の場合、システムの誤

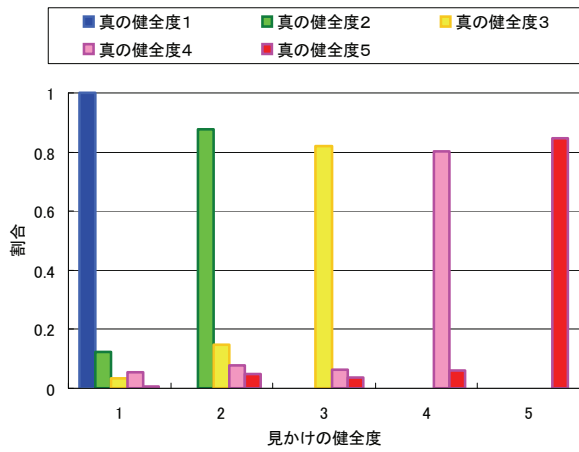


図-5 システム誤差分布

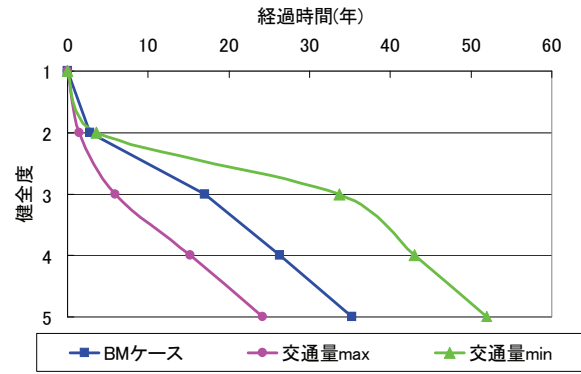


図-6 供用性曲線

表-4 レーティング期待寿命

劣化状態	$E[\theta_{il}]$	$E[RMD_{il}^k]$ (年)
1	0.362	2.762
2	0.070	14.286
3	0.107	9.346
4	0.112	8.929

注) 損傷度5はマルコフ連鎖の吸収状態であり、ハザード率、期待寿命は定義されない。

表-5 推移確率行列 (隠れマルコフ劣化モデル)

事前健全度	事後健全度				
	1	2	3	4	5
1	0.696	0.293	0.011	0.000	0.000
2	0.0	0.932	0.064	0.003	0.000
3	0.0	0.0	0.898	0.096	0.006
4	0.0	0.0	0.0	0.894	0.106
5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

注) 推移行列は、1年間の間に生起する状態推移確率を示している。ここでは、平均操作を行い、当該路線の平均的なひび割れ発生、推移確率を求めたものである。

差の影響により、見かけの健全度が広範囲に分散していることが理解できる。

つぎに、推計されたパラメータを用いて、式(11)より各劣化状態のハザード率の期待値と期待寿命を算出した。その結果を、表-4に示している。同表より、平均的なわだち掘れの進行過程は、初期時点から3年未満の早期段階で健全度2に推移し、その後は10年から15年程度の間隔で、健全度が低下していく。

### (3) 分析結果の考察

隠れマルコフ劣化モデルを用いて、マルコフ推移確率行列を求めよう。本研究で提案したハザードモデルは、説明変数の組み合わせごとにハザード率を定義することができる。言い換えれば、道路特性、車線特性別のマルコフ推移確率を推計することができる。ここで

は、すべての道路区間にわたってハザード率を平均化したような平均的なハザード率を用いてマルコフ推移確率を求めた。その結果を表-5に示している。ただし、マルコフ推移確率行列は、1年間隔で定義されている。つぎに、式(13)を用いて、供用性曲線を求めた。その結果を図-6に示す。同図には、対象区間全体の平均ハザード率を用いた供用性曲線 (BMケースと呼ぶ) を示している。さらに、大型車交通量がひび割れ進行に及ぼす影響を分析するために、観測された最大交通量と最小交通量を用いてハザード率を算出し、それぞれのハザード率に対応する供用性曲線を求めた結果も併記している。同図から、健全度2から健全度3の推移において、大型車交通量の影響が大きいことがわかる。具体的には、健全度2の平均寿命は、交通量最大区間では約4.5年であるのに対して、交通量最小区間では約30年となっている。ただし、前述したように、交通量の影響は供用開始時点から健全度3に至る過程にしか及ぼさず、健全度3以降では交通量に関わらず同じ速度で劣化する結果となっている。

### (4) システム誤差と推計バイアス

システムの誤差の存在が、多段階指数劣化ハザードモデルの推計結果に及ぼす影響を分析する。いま、図-1に示すようなデータに対して45度線より下方に位置する(事後健全度が事前健全度より改善した)区間に関しては、システムの誤差の存在が疑われる。そこで、1) 45度線より下方に位置する区間のデータを削除したデータベース (切断DBと呼ぶ)、2) 45度線より下方に位置する区間のデータに関して、事後健全度の値を事前健全度に一致させる(事前・事後を通じて健全度が変化しない)ように修正したデータベース(修正DBと呼ぶ)を作成し、これらのデータベースに対して多段階指数ハザードモデルのベイズ推計を試みた。多段階指数ハ



表-6 3種類のデータベースを用いた推計結果

健全度	切断DB		修正DB		再現DB	
	定数項	交通量	定数項	交通量	定数項	交通量
	$\beta_{i1}$	$\beta_{i2}$	$\beta_{i1}$	$\beta_{i2}$	$\beta_{i1}$	$\beta_{i2}$
1	0.247	0.325	0.214	0.362	0.270	0.415
	(0.238,0.256)	(0.267,0.378)	(0.205, 0.224)	(0.313,0.421)	(0.257,0.288)	(0.353,0.477)
	1.949	1.646	1.538	0.060	1.949	1.646
2	0.046	0.164	0.037	0.191	0.034	0.186
	(0.043,0.047)	(0.148,0.178)	(0.033,0.038)	(0.173,0.215)	(0.030,0.036)	(0.170,0.202)
	1.435	1.903	1.864	0.584	1.435	1.903
3	0.139	-	0.127	-	0.105	-
	(0.131,0.148)	-	(0.120,0.134)	-	(0.099,0.114)	-
	0.232	-	0.020	-	0.232	-
4	0.163	-	0.131	-	0.113	-
	(0.150,0.183)	-	(0.118,0.143)	-	(0.101,0.121)	-
	0.409	-	0.117	-	0.409	-

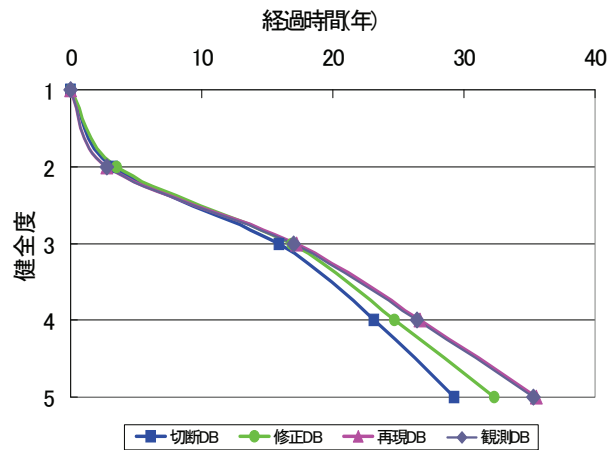
注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータサンプルの期待値、第2行はパラメータ推定値の95%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。切断DB、修正DBは、多段階指数劣化ハザードモデルを用いた推計結果を、再現DBは隠れマルコフ劣化ハザードモデルを用いて推計した結果(6.(5)参照)を示している。

表-7 ハザードモデルの再現結果

健全度	切断DB	修正DB	再現DB
1	0.311	0.286	0.360
2	0.079	0.075	0.069
3	0.139	0.127	0.107
4	0.163	0.131	0.112

注) 再現DBに関しては6.(5)において説明する。

ザードモデルのベイズ推計法の詳細は参考文献<sup>14)</sup>に譲る。これら2種類のデータベースを用いて、多段階指数劣化ハザードモデルを推計した結果を表-6に示している。なお、同表には、表-3に示す結果を用いて人為的に作成したデータベース(再現DBと呼ぶ)を用いて、隠れマルコフ劣化モデルを推計した結果も併記している。これに関しては、のちに6.(5)で再びとりあげる。さらに、表-7に、切断DB、修正DBを用いた場合における対象区間全体の平均ハザード率を求めた結果を示している。表-4に示す平均ハザード率 $E[\theta_{ij}]$ と表-7で求めた平均ハザード率を比較することにより、切断DB、修正DBのいずれを用いた場合においても、健全度1の平均ハザード率が隠れマルコフ劣化モデルを用いて求めた平均ハザード率 $E[\theta_{ij}]$ より小さい値となっていることが理解できる。一方、健全度3,4のように劣化が進行した場合、隠れマルコフ劣化モデルを用いた場合よりも、切断DB、修正DBを用いると、平均ハザード率が大きくなり、劣化速度が大きくなる。図-7には、平均ハザード率を用いて作成した供用性曲線を示している。平均ハザード率の比較結果からも類推できるように、切断DB、修正DBのいずれを用いた場合でも、隠れマルコフ劣化ハザードモデルを用いて推計した場合よりも、健全度1では劣化速度を過小に、健全度3,4で



注) 切断DB供用性曲線、修正DB供用性曲線は、それぞれ切断DB、修正DBに対して多段階指数劣化ハザードモデルを用いて求めた供用性曲線を示している。再現DB供用性曲線、観測DB供用性曲線は、再現DB、観測DBに対して隠れマルコフ劣化モデルを用いて作成した供用性曲線を表している。

図-7 供用性曲線

は過大評価する危険性が存在することが理解できる。このことは、事前健全度と事後健全度が逆転するようなサンプルにおいては、真の事後健全度が真の事前健全度より、劣化がそれほど進展していない可能性が大きいことを意味している。したがって、切断DBを用いた場合、2つの測定時点の間で劣化の進展が遅いサンプルが、データベースから除去される可能性がある。逆に、修正DBの場合、事後健全度が事前健全度に一致するため、事前健全度から劣化が進行しないと想定した(作成的な)データが増加するため、事前健全度が良好な場合、劣化速度を過小評価する可能性が増加する。しかし、適用事例に関する限り、健全度3に至るまでの供

用性曲線に関しては、切断DB, 修正DBを用いて推計した供用性曲線とシステムの誤差を考慮した供用性曲線の間に大きな差異はない。劣化が進行した段階においては、劣化速度の過大推計の程度が大きくなる。しかし、健全度が進行した段階では、道路舗装が補修されることによるサンプル欠損バイアスが発生するため、そもそも供用性曲線の推計精度自体に問題が発生する可能性が存在する。舗装劣化予測の実務において、かねてより路面性状調査結果のシステムの誤差の存在が指摘されてきた。現実の劣化予測においては、2つの測定時点において健全度が改善されるようなデータを除去したような切断DBを作成し、供用性曲線が作成されてきた。本適用事例に関する限り、健全度3程度の比較的わだち掘れが軽微な段階では、切断DBを用いて、多段階指数劣化ハザードモデルと供用性曲線の推計を行っても、実務上大きな支障はないように思える。しかし、このことは本適用事例にのみ成立する事項であり、システムの誤差の存在が舗装劣化予測に及ぼす影響に関して、今後経験的な知見を増やす努力が必要である。

#### (5) シミュレーションによる再現性の検証

隠れマルコフ劣化モデルは、見かけの健全度データを用いて、真の健全度の間に成立する推移関係を推計することを目的とする。モデルの推計に用いる健全度にシステムの誤差が存在しているため、実測値を用いて隠れマルコフ劣化モデルの推計精度を直接検討することができない。そこで、本節では、モンテカルロシミュレーションにより人為的にデータベースを作成して、隠れマルコフ劣化モデルの現象再現能力について分析することとする。いま、表-6に示す多段階指数劣化ハザードモデルが、真のモデルであると仮定しよう。隠れマルコフ劣化モデルの推計で用いたデータベースの各サンプルに対して、説明変数（大型車交通量）を入力変数として、表-5に示す多段階指数劣化ハザードモデルを用いれば、式(8),(9)より各サンプルに対してマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ を求めることができる。サンプル $k$  ( $k = 1, \dots, K$ )に対して、時点 $\tau_t^k$  ( $t = 1, \dots, T$ )で測定した時に得られる仮想的な健全度を、以下の手順で作成した。すなわち、1) 初期時点から時点 $\tau_1^k$ の推移確率 $\pi_{1j}(z_1^k)$ を用いて、時点 $\tau_1^k$ における真の健全度 $\hat{h}(\tau_1^k) = \hat{i}$ をランダムに発生する。ただし、 $z_1^k$ は、初期時点から時点 $t = 1$ までの時間間隔である。2) 真の健全度 $\hat{h}(\tau_1^k) = \hat{i}$ に対して、推移確率 $\pi_{ij}(z_2^k)$ を用いて、真の健全度 $\hat{h}(\tau_2^k) = \hat{j}$ をランダムに発生する。以下、同様の手順により、真の健全度 $\hat{h}(\tau_T^k)$ までランダムに発生する。3) システム誤差分布(図-5参照)を用いて、真の健全度 $\hat{h}(\tau_t^k)$  ( $t = 1, \dots, T$ )に対して、見かけの健全度 $\hat{m}(\tau_t^k)$ をランダムに発生する。このようにして作成した人為的なデータベースを

再現DBと呼ぶ。

以上のように作成した人為データベースを用いて、隠れマルコフ劣化モデルによりハザードモデルを推計した。以上の推計結果は、先に表-7に併記したとおりである。さらに、図-7には、観測DBと再現DBに対して、隠れマルコフモデルを用いて供用性曲線を作成した結果を示している。なお、前述したように、同図には切断DB, 修正DBを用いて作成した供用性曲線も併記している。表-5と表-7を比較することにより、隠れマルコフ劣化モデルを用いることにより、システム誤差の影響を排除して、真のマルコフ劣化ハザードモデルを再現することに成功していることが理解できる。その結果、図-7に示すように、隠れマルコフ劣化モデルを用いて、真の供用性曲線をほぼ再現できていると判断できよう。これに対して、切断DB, 修正DBを用いる方法では、供用性曲線の推計結果にバイアスが発生することになる。

## 7. おわりに

本研究では、土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルとして表現するとともに、健全度の測定結果に誤差が発生するメカニズムを隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現できることを示した。その際、測定誤差として代表値問題により発生するシステム誤差に着目した。さらに、システム誤差が介在するような見かけの健全度に関する測定データに基づいて、真の健全度により定義されるマルコフ劣化モデルを、マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーションによりベイズ推計する方法論を提案した。さらに、道路舗装を対象とした実証分析の結果、路面性状調査により測定される道路舗装の劣化情報に無視できないシステムの誤差が存在することを明らかにした。その上で、隠れマルコフ劣化モデルを用いて、システム誤差の背後に存在する劣化過程をマルコフ劣化モデルとして効果的に表現できることが明らかになった。しかし、本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルに関して、今後に残された研究課題がある。第1に、本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルは、道路舗装以外にも多様なタイプの土木施設の劣化予測に適用することが可能である。ただし、土木施設によりシステム誤差の発生メカニズムは多様に異なることが予想される。システム誤差の発生過程に関しては、システム誤差関数の特定化を含めて、今後の実証分析の蓄積が不可欠である。さらに、システム誤差の発生を可能な限り抑制しようとする測定方法に関する分析が必要である。第2に、劣化予測モデルに介在するシステムの誤差が発生する背景として、本研究で取り上げた代表値問題以外にも、多様な要因が考え

られる。測定機器や測定時刻に固有なシステムの測定バイアスも存在する。それ以外にも、初期時刻における更新・補修方法が、その後の劣化過程に及ぼす影響も無視できない。このような初期時刻の施工方法が劣化速度に及ぼす影響を分析するためには、ハザード率が確率変動するような混合ハザードモデルを開発することによりアプローチが可能である。第3に、M県の一般国道を対象とした実証分析では、劣化が進行するほど、切断DB、修正DBを用いた場合に、劣化速度の過大推計の程度が大きくなる。しかし、わだち掘れが軽微な段階では、切断DBや修正DBを用いても、システムの誤差による推計バイアスはそれほど大きいものではないことが判明した。しかし、このことは適用事例についてのみ成立する事項であり、今後、システムの誤差が舗装劣化予測に及ぼす影響に関する経験的知見を蓄積することが必要である。

なお、本研究の一部は文部科学省「若手研究者の自立的研究環境整備促進」事業によって大阪大学グローバル若手研究者フロンティア研究拠点にて実施された。

#### 参考文献

- 小林潔司, 上田孝行: インフラストラクチャのマネジメント: 研究展望, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.15-27, 2003.
- 青木一也, 若林伸幸, 大和田慶, 小林潔司: 橋梁マネジメントシステムアプリケーション, 土木情報利用技術論文集, Vol.14, pp.199-210, 2005.
- 貝戸清之, 保田敬一, 小林潔司, 大和田慶: 平均費用法に基づいた橋梁部材の最適補修戦略, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.83-96, 2005.
- 保田敬, 小林潔司: BMSにおける点検結果と状態推移確率がLCCに及ぼす影響, 建設マネジメント論文集, Vol.11, pp.111-122, 2004.
- Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- 杉崎光一, 貝戸清之, 小林潔司: 目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築, 構造工学論文集, Vol.52A, pp.781-790, 2006.
- 貝戸清之, 阿部允, 藤野陽三: 実測データに基づく構造物の劣化予測, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.29-38, 2003.
- 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- Mishalani, R. and Madanat S.: Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, *ASCE Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, 2002.
- 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 貝戸清之, 熊田一彦, 林秀和, 小林潔司: 階層型指数劣化ハザードモデルによる舗装ひび割れ過程のモデル化, 土木学会論文集F, Vol. 63, No. 3, pp.386-402, 2007.
- 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2006.
- 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也: サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
- 貝戸清之, 山本浩司, 小濱健吾, 岡田貢一, 小林潔司: ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル: 大規模情報システムへの適用, 土木学会論文集F, Vol.64, No. 2, pp.115-129, 2008.
- Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- MacDonald, I.L. and Zucchini, W.: *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*, Chapman & Hall, 1997.
- Hamilton, J.: A new approach to the economic analysis of nonstationary series and the business cycle, *Econometrica*, Vol. 57(2), pp.357-384, 1989.
- Diebold, F.X. and Inoue, A.: Long memory and regime switching, *Journal of Econometrics*, Vol.105, pp.131-159, 2001.
- Kim, C.-J. and Nelson, C.R.: *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press, 1999.
- 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
- Diebolt, J. and Robert, C.P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.
- Titterton, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
- Robert, C.P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
- Robert, C.P., Rydén, T. and Titterton, D.M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.62, pp.57-75, 2000.
- Dempster, A.P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.39, pp.1-38, 1977.
- Celeux, G., Hurn, M. and Robert, C.P.: Computational and inferential difficulties with mixture posterior distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.95, pp.957-970, 2000.
- Bauer, W.: Recent developments in econometric estimation of frontiers, *Journal of Econometrics*, Vol.46, pp.39-56, 1990.
- Kumbhakar, S. C. and Lovell, C.A.K.: *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.
- Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of

- images, *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.
- 34) Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.: Sampling-based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85, pp.398-409, 1990.
- 35) Gilks, W.R. and Wild, P.: Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling, *Applied Statistics*, Vol.41, pp.337-348, 1992.
- 36) Chib, S.: Marginal likelihood from Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 37) Newey, W. K. and West, K. D.: A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 38) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in: Bernardo, J.M., Berger, J.M., Dawid, A.P., and Smith, A.F.M. (eds.) :*Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.

(2008. 3.10 受付)

## A HIDDEN MARKOV DETERIORATION MODEL WITH MEASUREMENT ERRORS

Kiyoshi KOBAYASHI, Kiyoyuki KAITO and Hidekazu HAYASHI

The Markov chain models have been applied in many deterioration forecasting practices. The inspection data may include measurement errors, categorized by random errors and system one by the so-called representation matters. In this paper, the deterioration processes with measurement errors are formulated as a hidden Markov chain model. The Bayesian estimation of the hidden Markov chain models can be made by use of Markov Chain Monte Carlo simulation technique. The applicability of the methodology presented in this paper is examined against the real world data concerning the national road pavement.