

舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル

小林潔司¹・貝戸清之²・江口利幸³・大井明⁴・起塚亮輔⁵

¹フェロー会員 京都大学経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail: kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

²正会員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 東日本高速道路株式会社 関東支社京浜管理事務所 (〒 224-0044 横浜市都筑区川向町 1047)
E-mail: m.eguchi.ac@e-nexco.co.jp

⁴正会員 株式会社高速道路総合技術研究所 (〒 194-8508 町田市忠生 1-4-1)
E-mail: a.oi.aa@ri-nexco.co.jp

⁵学生会員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: okizuka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

舗装の劣化過程は路面の劣化過程と舗装全体の耐荷力の低下過程で構成される複合的過程である。耐荷力の低下は路面の劣化速度に影響を及ぼす。路面性状調査により路面の健全度を観測できる。一方、耐荷力の低下はFWD調査等により部分的に観測可能である。本研究では、このような特性を有する路面の劣化過程を、舗装耐荷力の状態に依存する混合マルコフ過程として記述する。その上で、路面の劣化過程と舗装耐荷力の低下過程により表現できる複合的な劣化過程を階層的隠れマルコフ劣化モデルとして表現する。さらに、具体的にNEXCOが運営する高速道路を対象とした適用事例を通じて、階層的隠れマルコフ劣化モデルを実際に推計するとともに、実務への適用可能性と有効性について実証的に検証する。

Key Words : *pavement management, hierarchical hidden Markov model, Bayesian estimation*

1. はじめに

舗装の劣化過程は、路面の劣化と耐荷力の低下という劣化メカニズムが異なる複合的な劣化現象である。路面の健全度は、道路利用者に対するサービス水準に直接影響を及ぼす。このため、路面の健全度が低下すれば、舗装のサービス水準を回復するために、オーバーレイ等、路面の維持補修が実施される。一方で、舗装構造全体(表層、基層、路盤、路床)も、繰り返し荷重等により耐荷力が低下する。耐荷力の低下により、路面の劣化速度が大きくなる場合、路面補修だけでなく舗装全体を補修することが必要となる。

路面性状調査等により、路面の健全度を測定することができる。一方、舗装耐荷力に関しても、たとえばFWD(Falling Weight Deflectometer)調査^{1),2)}等により、構造的劣化状態に関する情報を獲得できる。しかし、FWD調査を実施するためには莫大な調査費用と交通規制等の社会的費用を要するために、道路管理者がすべての道路区間に対してFWD調査を実施することは現実的ではない。舗装の耐荷力が低下すれば、路面の劣化速度に影響を及ぼす。このため、路面性状調査の結果から、路面の劣化速度を評価し、舗装構造の耐荷力低下に関する重点管理区間を選定する。重点管理区間が抽出できれば、FWD調査等による舗装構造の診断を効率的に実施することが可能となる。

本研究では、舗装の劣化過程を路面の劣化と舗装耐荷力の低下に起因する複合的過程として位置づける。舗装耐荷力の低下は路面の劣化速度に影響を及ぼすという階層的関係が存在する。また、路面性状調査により路面の健全度は観測できるが、舗装の耐荷力は観測できない。以上の問題意識の下に、本研究では、舗装全体の複合的劣化過程を階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現する。さらに、MCMC(Markov Chain Monte Carlo)法を用いて、モデルのパラメータを推計する方法を提案する。以下、**2.**で本研究の基本的考え方を述べる。**3.**では、階層的隠れマルコフ劣化モデルを定式化し、**4.**で、モデルの推計方法を提案する。**5.**では、MCMC法に基づくアルゴリズムを説明し、**6.**で高速道路を対象とした実証分析について考察する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

土木施設の統計的劣化予測モデルとしてマルコフ劣化モデルが提案されている。初期の段階におけるマルコフ推移確率の推計方法として、健全度間の推移状態に関する実データの数え上げにより、推移確率を推計する方法^{3),4)}がある。また、杉崎等⁵⁾は、異なる測定間隔を有する目視点検データを用いて、マルコフ推移確率を集計的に推計する方法を提案している。その後、マ

マルコフ推移確率の推計は、ハザード解析手法^{6)–9)}の導入により、飛躍的に発展した。中でも、Mishalani and Madanat¹⁰⁾は、2つの隣接する健全度のみを対象として、マルコフ推移確率を指数ハザードモデルを用いて表現する方法を提案した。これとは独立に、津田等は、2つ以上の任意の健全度間における推移状態を表現する多段階指数ハザードモデル¹¹⁾を提案し、マルコフ推移確率を推計する一般的な方法論を提案した。その後、マルコフ推移確率が過去の記憶を有する非斉次マルコフ推移確率を推計するための多段階ワイブル劣化ハザードモデル¹²⁾、異なる劣化パターン間の推移過程を表現する階層型指数劣化ハザードモデル¹³⁾、異なる損傷間の競争関係を記述する競合型劣化ハザードモデル¹⁴⁾が提案されている。また、マルコフ推移確率の推計方法に関しては、測定データが非常に少ない段階で、技術者の経験情報と測定結果を結合してマルコフ推移確率を推計するベイズ推計モデル^{15),16)}、予防補修により測定データが欠損することにより発生する欠損バイアスを補正する方法¹⁷⁾、ハザード率の異質性を考慮したランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル¹⁸⁾および混合マルコフ劣化ハザードモデル¹⁹⁾が提案されている。

以上の方法は、構造物の健全度が確定的に観測できることを想定したものである。一方、測定値に観測誤差が存在するなど不完全な情報に基づいて劣化過程を予測するモデルに関しては、あまり研究が進展していない。その中で、小林らは健全度に測定誤差が存在する場合を対象としてマルコフ推移確率を推計する隠れマルコフ劣化モデル²⁰⁾を提案している。本研究で対象とする舗装の劣化過程は、路面の劣化過程と舗装の耐力低下過程という2種類のマルコフ過程が存在し、耐力の低下が路面の劣化過程に影響を及ぼすという階層性を有する。さらに、路面性状調査では路面の健全度を観測できるが、耐力の低下を観測するためにはFWD調査等による調査が必要である。本研究では、路面性状調査、FWD調査結果を用いて、複合的な舗装の劣化過程を表現するための階層的隠れマルコフ劣化モデルを提案する。筆者らの知る限り、階層的隠れマルコフ劣化モデルに関する研究事例は、他に例をみない。

(2) 階層的劣化仮説

一般に、舗装は、表層、基層、路盤、路床という複数の層で構成される多層構造を有している。本研究では舗装の劣化状態を路面健全度と舗装全体の力学的特性を表す耐力という2つの評価指標を用いて表現する。このうち、路面は自動車利用による摩耗や繰り返し荷重、天候・気象等の影響により劣化が進展し、表層のひび割れ、わだち掘れ、平坦性の低下等の現象が顕在化する。路面性状調査を通じて、路面健全度を測定

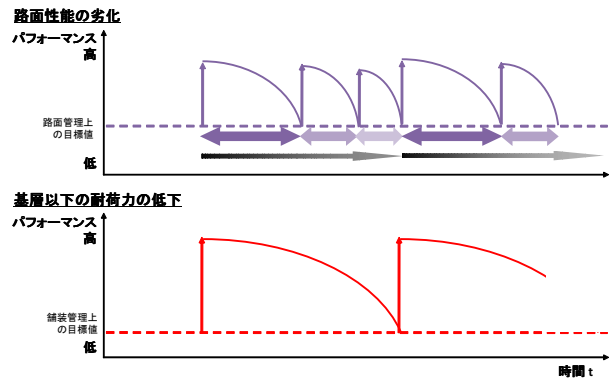


図-1 舗装構造の劣化過程

することが可能である。これと同時に、舗装を構成する各層も雨水や地下水の浸透、繰り返し荷重の作用等により構造的劣化が進展し、耐力が低下する。FWD調査を実施することにより、舗装の耐力を観察することができる。本研究では舗装の耐力が低下すれば、路面の劣化速度に影響を及ぼし路面の劣化が加速されると考える。すなわち、路面健全度と耐力の低下過程の間に、耐力の低下が路面の劣化速度に影響を及ぼすという階層的関係が存在するという仮説（以下、階層的劣化仮説と呼ぶ）を設ける。階層的劣化仮説が成立する場合、舗装の劣化過程を、模式的に図-1に示すように表現することができる。図の上段は路面の劣化過程を、下段は舗装全体の耐力の低下過程を示している。同図においては、路面の劣化過程の方が、舗装構造の耐力の低下過程よりも、早く劣化が進展するように描かれている。厳密には、表層の劣化状態が舗装の耐力に影響を及ぼすため、路面健全度と耐力の低下を厳密に区別することは難しい。しかし、適用事例の結果にも示すように、路面健全度の低下過程の方が、耐力の低下過程より進行速度が大きく、短期的には耐力の水準が一定であっても、耐力が低下した状態においては路面健全度の劣化速度が大きくなるという結果が観測されている²¹⁾。このため、本研究では耐力は相対的にゆっくりとした低下過程であり、耐力の状態に応じて路面の劣化速度が加速されるという階層的劣化仮説が成立すると考える。

以下、階層的劣化仮説に従って階層的隠れマルコフ劣化モデルを提案する。のちに、6.において、階層的劣化仮説に関する統計的検定を試みる。本研究でとりあげる適用事例に関する限り、階層的劣化仮説は棄却できないことが判明したことを付記しておく。

(3) 階層的隠れマルコフ劣化モデル

舗装マネジメントにおいては、路面の劣化状態に対して、維持すべき管理目標（健全度）が規定されており、

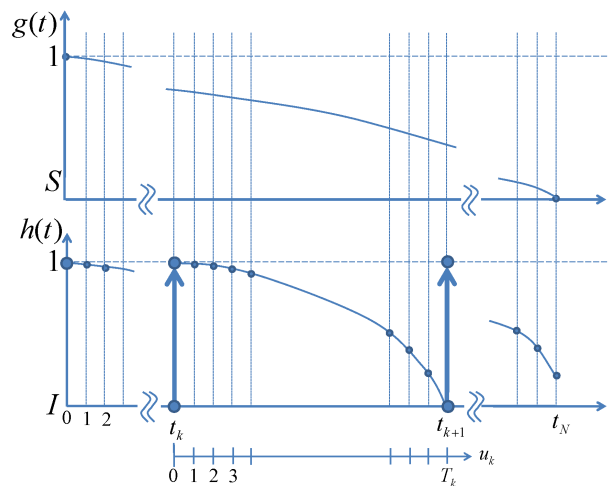
路面の健全度が管理目標に達した時点で路面の補修が実施され、舗装の健全度は初期状態まで回復する。舗装構造の耐荷力も時間の経過とともに低下する。耐荷力の低下により、路面の劣化速度が加速される。このため、初期時点から路面の補修回数が増加するほど、舗装の補修間隔が短くなる。舗装の耐荷力が低下した場合、路面のみの補修だけではなく、舗装全体を補修することがライフサイクル費用を抑制する上でも望ましくなる。路面性状調査においては調査車を通常走行させることにより、路面健全度を測定することができる。これに対して、FWD 調査を実施するためには車線走行規制のための規制費用が必要であり、本線上の交通流の渋滞や遅延という社会的費用が発生する。また、目視点検により耐荷力を計測することは不可能である。このため、路面健全度と比較して、耐荷力に関する情報を獲得することは容易ではない。本研究では路面性状調査と FWD 調査という 2 つの調査を通じて、路面健全度と耐荷力という 2 種類の情報を獲得できるが、調査時点によっては路面健全度に関する情報のみが観測可能であるような場合を想定する。この場合でも、階層的劣化仮説が成立する場合、路面の劣化速度に関する情報を用いて耐荷力の状態を間接的に推計することが可能である。このような観点から、森等²¹⁾は路面の劣化速度が大きい区間に対して重点的に耐荷力を調査するという方法論を提案している。

以上の問題意識の下に、本研究では耐荷力の低下過程をマルコフ過程として表現するとともに、路面の劣化過程を劣化速度が耐荷力の状態に依存するような非斉次マルコフ過程として表現する。さらに、耐荷力、路面健全度の複合的な劣化過程を、**図-1**に示すように、路面の劣化過程を上位システム、耐荷力の低下過程を下位システムとし、上位システムの変化過程が下位システムの変化過程の影響を受けるような階層的マルコフ過程モデルを提案する。さらに、路面性状調査を通じて上位システムの状態は観測できるが、下位システムの状態は FWD 調査を実施することにより観測可能となる。路面性状調査を実施した時点では、路面健全度は観測できるが、路面の劣化速度に影響を及ぼす耐荷力に関しては観測できない。本研究では、このような下位システムの部分的観測可能性を考慮した階層的隠れマルコフ劣化モデルを提案することとする。

3. モデルの定式化

(1) 前提条件

階層的隠れマルコフ劣化モデルを定式化するために、**図-2**に示すような時間軸を導入する。道路管理者がカレンダー時刻 a_0 に道路施設を建設（もしくは更新）し、



注) 図の上段は、耐荷力の低下過程、下段は路面健全度の低下過程を表す。●印は調査時点を表す。時点 t_k で路面補修が実施され、時点 t_k を起点とする局所時点軸 u_k が定義される。

図-2 局所時間軸

それ以降の時刻にわたって道路舗装を管理する問題を考える。カレンダー時刻 a_0 を初期時点 $t = 0$ とする離散時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$ を導入する。離散時間軸上の点を時点とよびカレンダー時刻と区別する。対象とする劣化過程は、**図-1**に示したように、路面健全度、耐荷力の劣化過程という 2 階層の複合的劣化システムで構成されていると考える。簡単のために、初期時点から舗装全体の補修は一度も実施されていないと考える。舗装全体の補修が実施されれば、そのカレンダー時刻を初期時点と考えればよい。**図-2**において、離散時間軸上の時点 $t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ において路面の補修が実施される。さらに、路面の補修が実施された時点 t_k を始点 $u_k = 0$ とする局所離散時間軸 $u_k = 0, 1, 2, \dots, T_k$ を導入する。ただし、 T_k は時点 t_k で路面を補修し、次の補修時点に到達するまでの期間長であり $T_k = t_{k+1} - t_k$ で表される。局所離散時間軸上の時点 u_k を局所時点と呼ぶ。各離散時点における舗装構造の耐荷力を離散的状態変数 $g(t)$ ($t = 0, \dots, \infty$) を用いて表現する。ただし、離散的状态変数はレーティング $g(t) = s$ ($s = 1, \dots, S$) を用いて記述される。レーティング s ($s = 1, \dots, S$) は、 s の値が大きくなるほど舗装構造の耐荷力が低下していることを意味している。 $g(t) = S$ の場合は、耐荷力が使用限界に到達していることを意味する。初期時点 $t = 0$ において $g(0) = 1$ である。つぎに、路面の健全度を I 個のレーティング $h(u_k) = i$ ($i = 1, \dots, I; u_k = 0, \dots, T_k$) で記述する。ただし、局所時点 $u_k = 0$ において $h(0) = 1$ が成立する。 $h(u_k) = I$ は、路面の使用限界を表す。

本研究では**図-1**に示したように、舗装システムを路面、舗装構造という 2 階層モデルで表現する。路面の

劣化過程, 舗装構造の耐荷力の低下過程とともにマルコフ劣化過程で表現する. 舗装構造の耐荷力の低下過程は, 過去の劣化過程に依存せず, 斉次マルコフ過程で表現できると考える. しかし, 路面の劣化過程は, 舗装構造の耐荷力に依存する. このため, 路面の劣化過程は, 劣化速度が舗装構造の耐荷力に依存するような非斉次マルコフ劣化モデルを用いて表現される. 以下では, **3.(2)**において, 耐荷力の低下過程を斉次マルコフ連鎖モデルで表現し, **3.(3)**で, 路面の劣化過程を非斉次マルコフ連鎖モデルで表現する.

(2) 耐荷力の低下過程

道路舗装を建設・更新した初期時点 a_0 を起点とする離散時間軸 $t = 0, 1, \dots$ を考える. 舗装構造の耐荷力を S 個のレーティング指標 s ($s = 1, \dots, S$) で表現する. s の値が大きくなるほど, 耐荷力が低下した状況を表す. 離散時間軸上の期間 $[t, t+1]$ における耐荷力の低下過程を表すマルコフ推移確率は, 時点 t で評価された耐荷力 $g(t) = s$ を与件とし, 次の $t+1$ 期において耐荷力 $g(t+1) = l$ が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[g(t+1) = l | g(t) = s] = p^{sl} \quad (1)$$

として定義できる. 期間長を1に基準化する. マルコフ推移確率は, 津田等¹¹⁾が開発したマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現できる. そのために, 時点 t における耐荷力 s ($s = 1, \dots, S-1$) のハザード率 (以下, 耐荷力ハザード率と呼ぶ)⁶⁾⁻⁹⁾ λ^s を

$$\lambda^s = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}^s \quad (2)$$

と表す. ただし, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_Q)$ は, 説明変数ベクトルである. $\boldsymbol{\beta}^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_Q^s)'$ は未知パラメータベクトルである. 記号 \prime は転置を, Q は説明変数の数を表す. 耐荷力ハザード率 λ^s は, 期間 $[t, t+1]$ に対して定義されている. このとき, 時点 t において耐荷力 s の状態から, 時点 $t+1$ においても耐荷力 s が継続する確率は,

$$\begin{aligned} p^{ss} &= \text{Prob}[g(t+1) = s | g(t) = s] \\ &= \exp(-\lambda^s) \end{aligned} \quad (3)$$

となる. さらに, 時点 t と時点 $t+1$ の間で耐荷力が s から l ($l > s$) に推移するマルコフ推移確率 p^{sl} ($s = 1, \dots, S-1; l = s+1, \dots, S$) は,

$$\begin{aligned} p^{sl} &= \text{Prob}[g(t+1) = l | g(t) = s] \\ &= \sum_{m=s}^l \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ & \quad (s = 1, \dots, S-1; l = s+1, \dots, S) \end{aligned} \quad (4)$$

と表すことができる¹¹⁾. ただし, 表記上の規則として,

$$\begin{cases} \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} = 1 & (m = s \text{ の時}) \\ \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} = 1 & (m = l \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える. さらに, 表記の便宜上,

$$\begin{aligned} & \prod_{z=s, \neq m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ &= \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \end{aligned}$$

と簡略化する. また, p^{sS} に関しては, マルコフ推移確率の条件より次式で表せる.

$$p^{sS} = 1 - \sum_{l=s}^{S-1} p^{sl} \quad (s = 1, \dots, S-1) \quad (5)$$

以上の推移確率を用いれば, 期間 $[t, t+1]$ で定義される条件付確率 (3) を要素とするマルコフ推移行列を

$$P = \begin{pmatrix} p^{11} & \dots & p^{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{SS} \end{pmatrix} \quad (6)$$

と定義することができる. さらに, 期間 $[t, t+v]$ における推移確率行列 (以下, v 期推移確率行列と呼ぶ) は

$$P(v) = \{P\}^v \quad (7)$$

と表される. なお, v 期推移確率行列を

$$P(v) = \begin{pmatrix} p^{11}(v) & \dots & p^{1S}(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{SS}(v) \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表記する.

(3) 路面の劣化過程

いま, 時点 t_k ($u_k = 0$) に路面の補修が実施され, 路面の健全度が $h(0) = 1$ に改善する. 局所時点 u_k から $u_k + 1$ の間において生起する路面の劣化状態の推移状態を, マルコフ推移確率で表す. 単位期間 $[u_k, u_k + 1]$ の期間長も1に基準化する. 局所時点 u_k における耐荷力 s は観察可能ではないが, ひとまず既知であると考え. 局所期間 $[u_k, u_k + 1]$ (離散時間軸上の期間 $[t_k + u_k, t_k + u_k + 1]$) における路面の劣化過程を表すマルコフ推移確率は, 局所時点 u_k (時点 $t_k + u_k$) で評価された耐荷力 $g(t_k + u_k) = s$ と路面の健全度 $h(u_k) = i$ を与件とし, 次の局所時点 $u_k + 1$ において健全度 $h(u_k + 1) = j$ が生起する条件付確率

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[h(u_k + 1) = j | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \pi^{ij}(s) \end{aligned} \quad (9)$$

として定義できる. 耐荷力 s を与件とした健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の路面健全度ハザード率 $\mu^i(s)$ を

$$\mu^i(s) = \gamma_0^s \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^i = \gamma_0^s \mu^i \quad (10)$$

と表す. ただし, γ_0^s ($s = 1, \dots, S-1$) は耐荷力 s に依存する路面劣化速度の異質性を表すスケールパラメータ, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^V)$ は説明変数ベクトル, $\boldsymbol{\gamma}^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_V^i)'$ は未知パラメータベクトル, $\mu^i = \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^i$ で

ある. $\gamma_0^1 = 1$ に基準化する. このとき, 耐荷力 s の下で局所時点 u_k において健全度が i であり, 局所時点 $u_k + 1$ においても健全度 i が継続する確率は,

$$\begin{aligned} \pi^{ii}(s) &= \text{Prob}[h(u_k + 1) = i | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \exp\{-\mu^i(s)\} \\ &= \exp(-\gamma_0^s \mu^i) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. さらに, 局所時点 u_k と局所時点 $u_k + 1$ の間で健全度が i から j ($> i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi^{ij}(s)$ ($i = 1, \dots, I-1; j = i, \dots, I$) は,

$$\begin{aligned} \pi^{ij}(s) &= \text{Prob}[h(u_k + 1) = j | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \sum_{z=i}^j \prod_{r=i, \neq z}^{j-1} \frac{\mu^r(s)}{\mu^r(s) - \mu^z(s)} \exp\{-\mu^z(s)\} \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I) \end{aligned} \quad (12)$$

と表すことができる. また, $\pi^{iI}(s)$ に関しては, マルコフ推移確率の条件より次式で表せる.

$$\begin{aligned} \pi^{iI}(s) &= 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi^{ij}(s) \\ &\quad (s = 1, \dots, S-1) \end{aligned} \quad (13)$$

以上の推移確率を用いれば, 局所期間 $[u_k, u_k + 1]$ で定義される条件付確率 (9) を要素とするマルコフ推移行列を次式のように定義することができる.

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} \pi^{11}(s) & \dots & \pi^{1I}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pi^{II}(s) \end{pmatrix} \quad (14)$$

(4) 舗装構造の劣化過程

いま, 初期時点 $t = 0$ において, 舗装全体が更新され, 耐荷力が $g(0) = 1$ に, 健全度が $h(0) = 1$ に確定したと考える. その後, 時間の経過とともに, 路面と舗装構造ともに劣化が進行していく. 初期時点以降, 舗装は更新されないが, 路面に関しては, 離散時間軸上の時点 t_k ($k = 1, 2, \dots$) で補修が実施されると考える. 舗装耐荷力の低下過程は観測不可能であるが, マルコフ推移確率 (6) を用いれば, 時点 t における舗装耐荷力分布 $\nu(t) = \{\nu_1(t), \dots, \nu_S(t)\}$ は

$$\nu(t) = \nu(0)P(t) \quad (15)$$

と表される. ただし, $\nu(0) = (1, 0, \dots, 0)$ は, 初期時点における耐荷力分布である.

つぎに, 時点 t_k に直近の路面補修が実施され, u_k 期が経過した時点 $t_k + u_k$ に着目する. 時点 $t_k + u_k$ における舗装構造の耐荷力は観測できないが, 耐荷力分布 $\nu(t_k + u_k)$ に従って分布していると考え. 時点 $t_k + u_k$ から時点 $t_k + u_k + 1$ における路面の推移確率を混合マ

ルコフ推移確率

$$\tilde{\pi}^{ij}(t) = \sum_{s=1}^S \nu_s(t) \pi^{ij}(s) \quad (16)$$

で表現する. 式 (16) は複数の舗装構造の耐荷力に対する路面の推移確率を加重平均した推移確率を表しており, 混合分布モデル (mixture distribution model)²²⁾ と呼ばれる. 当然のことながら, $\sum_{j=1}^I \tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k) = \sum_{s=1}^I \nu_s(t_k + u_k) \sum_{j=1}^I \pi^{ij}(s) = 1$ を満足するため $\tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k)$ は推移確率の条件を満足する. ここで, $\tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k)$ を (i, j) 要素とする推移確率行列 $\tilde{\pi}(t_k + u_k)$ を定義する. 舗装構造の耐荷力分布 $\nu(t_k + u_k)$ が時間とともに変化するため路面の推移確率行列 $\tilde{\pi}(t_k + u_k)$ は時間に依存する. すなわち, 舗装耐荷力の低下過程が斉次マルコフ連鎖で表現できる場合でも, 路面の劣化過程は非斉次マルコフ連鎖に従うことになる. 離散時間軸の局所時点 u_k における路面の健全度分布を $\rho(u_k) = \{\rho_1(u_k), \dots, \rho_I(u_k)\}$ と表す. また, 局所離散時間軸の初期時点 $u_k = 0$ における健全度分布は $\rho(0) = \{1, 0, \dots, 0\}$ と表せる. したがって, 時点 $t = t_k + u_k$ における路面の健全度分布は

$$\rho(u_k) = \rho(0) \prod_{v=0}^{u_k-1} \tilde{\pi}(t_k + v) \quad (17)$$

と表される. したがって, 舗装の劣化過程は, 任意の $t = t_k + u_k$ に対して

$$\nu(t) = \nu(0)P(t) \quad (18a)$$

$$\rho(u_k) = \rho(0) \prod_{v=0}^{u_k-1} \tilde{\pi}(t_k + v) \quad (18b)$$

と表される. このように, 舗装の劣化過程は斉次マルコフ連鎖モデル (18a) と非斉次マルコフ連鎖モデル (18b) を用いて表現できる. さらに, 舗装構造のマルコフ連鎖モデル (18a) は直接的に観察不可能であり, 舗装構造の耐荷力分布が路面の劣化過程 (18b) に影響を及ぼすという階層構造を有している. 本研究では, このような特性を有するマルコフ連鎖モデルを階層的隠れマルコフ劣化モデルと呼ぶこととする.

4. モデルの推計方法

(1) 隠れマルコフ劣化モデル

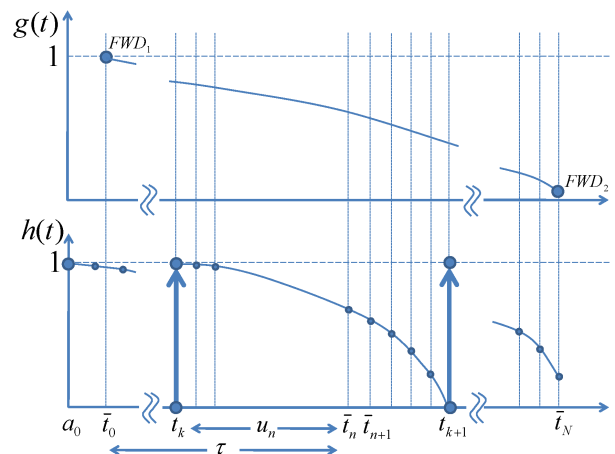
隠れマルコフ連鎖モデルは, 測定される状態変数に誤差が介在するようなマルコフ連鎖モデルである. 隠れマルコフ連鎖モデルに関する理論的研究に関しては研究の蓄積があり, いくつかの成書²³⁾ で詳細に紹介されている. しかし, 隠れマルコフ連鎖モデルの推計方法に関しては, のちに **4.(3)** で言及するような困難性が存在するため, 十分な研究が蓄積されていない. そのため, 隠れマルコフ連鎖モデルの適用事例もそれほ

ど多くない. 近年になり, 時系列モデルに関する研究の発展とともに, 動的混合分布モデルと呼ばれる時系列統計モデルに関する研究が進展した. 隠れマルコフ連鎖モデルは, 動的混合分布モデルの中で, レジーム遷移 (regime switching) モデルと類似の確率構造を有している. このため, レジーム遷移モデルの推計方法を, 隠れマルコフ連鎖モデルの推計にも適用できることが判明した.

レジーム遷移モデルは, Hamilton²⁴⁾によって提案され, 景気分析や金融計量経済学の分野で応用研究が急速に進展しつつある. レジーム遷移モデルでは, 時系列データの構造変化を, レジーム間の遷移現象として把握し, レジーム間推移確率を非線形時系列モデルとして定式化する²⁵⁾. たとえば, Hamilton²⁴⁾は, レジーム間の推移確率過程をマルコフ過程で表現したようなマルコフ遷移モデルを提案している²⁶⁾. マルコフ遷移モデルは, 時系列データの推移過程をマルコフ連鎖を用いて表現するモデルである. マルコフ遷移モデルの推計方法の発展により, 隠れマルコフ連鎖モデルの推計上の困難性も克服されることが判明した. とりわけ, MCMC (Markov Chain Monte Carlo: マルコフ連鎖モンテカルロ) 法の発展が, マルコフ遷移モデルの推計に大きく貢献している. すでに, MCMC法を用いた隠れマルコフ連鎖モデルの推計方法に関しても, いくつかの研究事例がある²⁷⁾. しかし, これらの既往研究では, マルコフ推移確率を直接求めることを目的としており, **2. (1)** で言及した集計的手法に属する. 本研究では, 非集計的方法でマルコフ推移確率を求めることを目的としており, このような立場から隠れマルコフ連鎖モデルを推計する研究事例は他に見あたらない.

(2) 調査スキーム

いま, ある道路区間におけるデータ調査スキームを考える. 図-3に示すように離散時間軸上のある時点 $t = \bar{t}_0$ において FWD 調査が実施され耐荷力 $g(\bar{t}_0) = s$ と路面健全度 $h(\bar{t}_0) = i$ が観測されたと考える. 時点 \bar{t}_0 が初期時点 $t = 0$ に一致する場合, $s = 1, i = 1$ と表記されることになる. 時点 \bar{t}_0 から時間の経過に伴って耐荷力が低下していく. 図-3に示すように離散時間上の時点 $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ に路面性状調査が実施され路面健全度 $h(\bar{t}_n) (n = 0, \dots, N)$ を観測する. さらに, 最終時点 \bar{t}_N に次回の FWD 調査が実施される. 路面を補修した時点 $t_k (k = 1, \dots, t_K)$ も路面性状調査が実施された時点に含まれ, 路面の健全度 $h(t_k) = 1$ が観測されたと考える. 各調査時点 $\bar{t}_n (n = 1, \dots, N)$ において, 前回の FWD 調査を実施した時点 \bar{t}_0 からの経過時間 τ_n , 直近の補修時点 \bar{t}_k からの経過時間 $u_n = \bar{t}_n - \bar{t}_k$, 観測された健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n$ に関する情報の組 $\bar{\xi}_n = (\tau_n, u_n, \bar{m}_n)$ に



注) 図の上段は, 耐荷力の低下過程, 下段は路面健全度の低下過程を表す. ●印は調査時点を表す. 時点 \bar{t}_0 で FWD 調査が実施され, 時点 \bar{t}_N で次回の FWD 調査が実施される. 時点 \bar{t}_k で路面補修が実施され, 期間 $[t_k, t_{k+1}]$ 中, 時点 $\bar{t}_k, \dots, \bar{t}_n, \dots, t_{k+1}$ において路面性状調査が実施される.

図-3 調査スキーム

関する情報を獲得することができる.

(3) 混合分布モデル

初期時点 $t = \bar{t}_0$, 最終時点 $t = \bar{t}_N$ とする期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ に着目する. 期間長を $\bar{\tau} = \bar{t}_N - \bar{t}_0$ と表す. 初期時点 $t = \bar{t}_0$ において, 路面性状調査と FWD 調査が実施され, 路面の健全度 $h(\bar{t}_0) = \bar{m}_0$ と舗装の耐荷力 $g(\bar{t}_0) = \bar{s}_0$ が観測されたとする. また, 最終時点 $t = \bar{t}_N$ において路面の健全度 $h(\bar{t}_N) = \bar{m}_N$ と舗装の耐荷力 $g(\bar{t}_N) = \bar{s}_N$ が観測されたとする. この時, 1) 階層的隠れマルコフ劣化モデル (18a) において, 路面の健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n (n = 0, \dots, N)$ と 2) 時点 \bar{t}_0 と \bar{t}_N における耐荷力 $g(\bar{t}_0) = \bar{s}_0$ と $g(\bar{t}_N) = \bar{s}_N$ が既知である. さらに, 3) モデル (18b) において, 任意の時点 $\bar{t}_n (n = 1, \dots, N - 1)$ における耐荷力が少なくとも最終時点における最終耐荷力 \bar{s}_N を下回らない, という情報が獲得できる. すなわち, 時点 $\bar{t}_n (n = 1, \dots, N - 1)$ の耐荷力を s_n とすれば,

$$\bar{s}_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{N-1} \leq \bar{s}_N \quad (19)$$

が成立する. このことより, 時点 \bar{t}_n において耐荷力が s となる確率 $\tilde{\nu}_s(\bar{t}_n : \bar{s}_0, \bar{s}_N)$ は, 1) 初期時点 \bar{t}_0 において耐荷力 \bar{s}_0 であり, 時点 \bar{t}_N において \bar{s}_N となる事象の中で, 2) 初期時点 \bar{t}_0 において耐荷力 \bar{s}_0 であり, 時点 \bar{t}_n で耐荷力 s となり, かつ時点 \bar{t}_N において \bar{s}_N となる事象が生起する条件付き確率

$$\tilde{\nu}_s(\bar{t}_n : \bar{s}_0, \bar{s}_N) = \frac{p^{\bar{s}_0, s}(\bar{\tau}_n) p^{s, \bar{s}_N}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_n)}{p^{\bar{s}_0, \bar{s}_N}(\bar{\tau})} \quad (20)$$

を用いて表すことができる. ただし, $\bar{\tau}_n = \bar{t}_n - \bar{t}_0$, $\bar{\tau} = \bar{t}_N - \bar{t}_0$, $p^{s, l}(u)$ は u 期間において耐荷力が s から l に推移する推移確率を表しており, 式 (8) により定義さ

れる。ここで、期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ の中に含まれる隣接する 2 つの任意の路面性状調査時点 \bar{t}_n, \bar{t}_{n+1} に着目する。期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ の期間長を $z_n = \bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n$ と表す。データ調査スキームの構造より、隣接する 2 点の間には補修作業は実施されていない。期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ に含まれる隣接する 2 つの時点 $\bar{t}_n + v, \bar{t}_n + v + 1$ の間に健全度が $h(\bar{t}_n + v) = h$ から $h(\bar{t}_n + v + 1) = w$ に推移する確率は混合マルコフ推移確率 (16) を用いて

$$\tilde{\pi}^{h,w}(\bar{t}_n + v) = \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + v : \bar{s}_0, \bar{s}_N) \pi^{h,w}(s) \quad (21)$$

と表せる。ここで、調査時点 \bar{t}_n に健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n$ が観測され、時点 \bar{t}_{n+1} に健全度 $h(\bar{t}_{n+1}) = \bar{m}_{n+1}$ が観測される条件付き確率 (尤度) を、再帰的に

$$\mathcal{L}(\bar{m}_n, \bar{m}_{n+1}) = \sum_{w=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \tilde{\pi}^{\bar{m}_n, w}(\bar{t}_n) \ell_w(\bar{t}_n + 1) \quad (22a)$$

$$\ell_h(\bar{t}_n + v) = \sum_{w=h}^{\bar{m}_{n+1}} \tilde{\pi}^{h,w}(\bar{t}_n + v) \ell_w(\bar{t}_n + v + 1) \quad (1 \leq v \leq z_n - 2) \quad (22b)$$

$$\ell_h(\bar{t}_n + z_n - 1) = \tilde{\pi}^{h, \bar{m}_{n+1}}(\bar{t}_n + z_n - 1) \quad (22c)$$

と定義する。また、最終時点 \bar{t}_N において耐荷力が \bar{s}_N となる尤度は、

$$\tilde{\ell}(\bar{t}_N) = p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \quad (23)$$

と表現できる。道路管理者が獲得可能な情報集合を $\Xi = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{\xi}, \bar{s}\}$ と表す。ただし、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は、ハザードモデル (2), (10) の説明変数ベクトル、 $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_N)$ は路面性状調査結果に関わる情報ベクトル、 $\bar{s} = (\bar{s}_0, \bar{s}_N)$ は FWD 調査結果ベクトルである。この時、情報集合 Ξ が観測される尤度は次式で定義される。

$$\mathcal{L}(\Xi : \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(\bar{m}_n, \bar{m}_{n+1}) \cdot p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \quad (24)$$

ただし、 $\theta = \{\beta^s, \gamma^i : s = 1, \dots, S-1, i = 1, \dots, I-1\}$ は未知パラメータベクトルである。

階層的隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数 (22a)-(22c) は、 $\tilde{\pi}^{h,w}(\bar{t}_n + v)$ に関して高次の非線形多項式であり、1 階の最適化条件が非常に多くの零点解を有する^{28), 29)}。推移確率 $\tilde{\pi}^{h,w}(\bar{t}_n + v)$ の推定値は 0 と 1 の間にある実数解を選択しなければならない。最尤法の代わりにベイズ推計法を用いれば、高次の非線形多項式を解く問題を回避できる。しかし、尤度関数 (22a)-(22c) が、極めて多くの項を含んでおり、計算量が膨大になってしまふ欠点がある³⁰⁾⁻³³⁾。このような最尤法の難点を克服するために、尤度関数の完備化操作が必要となる。

(4) 完備化操作

観測期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ 中の時点 \bar{t}_n, \bar{t}_{n+1} に健全度 \bar{m}_n, \bar{m}_{n+1} が観測された場合を考える。一方、耐荷力 s_n, s_{n+1} は

観測されない。階層的隠れマルコフ劣化モデルを推計するために、期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ を構成する局所時点 $\bar{t}_n + 1, \dots, \bar{t}_n + z_n - 1 (= \bar{t}_{n+1} - 1)$ における健全度の推移パターンを潜在変数ベクトル $\tilde{\mathbf{m}} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{z_n-1})$ を用いて表す。ただし、 z_n は期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ の期間長である。また、舗装構造の耐荷力の推移パターンを潜在変数ベクトル $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_0 (= s_n), \dots, \tilde{s}_{z_n} (= s_{n+1}))$ を用いて表す。劣化過程の性質より、施設が補修されない限り、

$$\bar{m}_n \leq \tilde{m}_1 \leq \dots \leq \tilde{m}_{z_n-1} \leq \bar{m}_{n+1} \quad (25a)$$

$$s_n = \tilde{s}_0 \leq \tilde{s}_1 \leq \dots \leq \tilde{s}_{z_n} = s_{n+1} \quad (25b)$$

を満足する。真の健全度 \mathbf{m} 、耐荷力 \mathbf{s} は本来観測できない潜在変数であるが、ひとまずこれらの潜在変数が仮に測定できたと考える。そこで、仮想的観測値 $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{s}}$ に基づいて、ダミー変数

$$\delta_{\tilde{m}_v}^m = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_v = m \\ 0 & \tilde{m}_v \neq m \end{cases} \quad (26)$$

$$(v = 1, \dots, z_n - 1; m = \bar{m}_n, \dots, \bar{m}_{n+1})$$

$$\delta_{\tilde{s}_v}^s = \begin{cases} 1 & \tilde{s}_v = s \\ 0 & \tilde{s}_v \neq s \end{cases} \quad (27)$$

$$(v = 1, \dots, z_n - 1; s = \bar{s}_0, \dots, \bar{s}_N)$$

を導入する。 \bar{s}_0, \bar{s}_N は、時点 \bar{t}_0, \bar{t}_N における耐荷力であり既知である。潜在変数ベクトル $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{s}}$ を与件とした尤度関数 (24) は

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{s}}, \Xi, \theta) \\ &= \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \sum_{m=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n) \right\}^{\delta_{\bar{s}_0}^s} \left\{ \pi^{\bar{m}_n, m}(s) \right\}^{\delta_{\bar{m}_1}^m} \sum_{v=1}^{z_n-2} \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \\ & \quad \sum_{i=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \sum_{m=i}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + v) \right\}^{\delta_{\bar{s}_v}^s} \left\{ \pi^{im}(s) \right\}^{\delta_{\tilde{m}_v}^i} \delta_{\tilde{m}_{v+1}}^m \\ & \quad \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \sum_{i=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + z_n - 1) \right\}^{\delta_{\bar{s}_{z_n-1}}^s} \\ & \quad \left\{ \pi^{i\bar{m}_{n+1}}(s) \right\}^{\delta_{\tilde{m}_{z_n-1}}^i} p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \\ &= \prod_{v=1}^{z_n-1} \tilde{\nu}_{\tilde{s}_v}(\bar{t}_n + v) \pi^{\tilde{m}_v, \tilde{m}_{v+1}}(\tilde{s}_v) p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \quad (28) \end{aligned}$$

と表現できる³²⁾。以上の操作を完備化 (completion) とする。完備化された尤度関数 (28) (以下、完備化尤度関数と呼ぶ) (28) は、通常の尤度関数 (22a)-(22c) より大幅に簡略化されている。ただし、完備化尤度関数 (28) の中に含まれる潜在変数 $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{s}}$ は、測定できない変数である。そこで、完備化尤度関数を用いて、潜在変数の確率分布を推計することを考える。完備化尤度関数を展開すれば、潜在変数 $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{s}}$ に関する全条件付事後分布 (full conditional posterior distribution) を導出できる。

耐荷力の低下過程の特性により、補修が実施されない限り、条件 (25b) が成立する。ここで、潜在変数

を用いて $\tilde{s}_{-v} = (\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1}, \dots, \tilde{s}_{z_n})$, $\tilde{s}_{-v}^s = (\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{v-1}, s, \tilde{s}_{v+1}, \dots, \tilde{s}_{z_n})$ とすれば, $s_v = s$ ($s \in \{\tilde{s}_{v-1}, \dots, \tilde{s}_{v+1}\}$) の全条件付事後確率は,

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{s_v = s | \tilde{s}_{-v}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{s}_{-v}^s, \tilde{\Xi}, \boldsymbol{\theta})}{\sum_{s=\tilde{s}_{v-1}}^{\tilde{s}_{v+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{s}_{-v}^s, \tilde{\Xi}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{\omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1})}{\sum_{s=\tilde{s}_{v-1}}^{\tilde{s}_{v+1}} \omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1})} \end{aligned} \quad (29)$$

と表される. ただし,

$$\omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1}) = \begin{cases} p^{\tilde{s}_0^s} p^{s \tilde{s}_2} & v = 1 \\ p^{\tilde{s}_{v-1}^s} p^{s \tilde{s}_{v+1}} & 2 \leq v \leq z_n - 2 \\ p^{\tilde{s}_{z_n-2}^s} p^{s \tilde{s}_{z_n}} & v = z_n - 1 \end{cases} \quad (30)$$

と表される. 同様に, 舗装路面の劣化過程の特性により, 条件 (25a) が成立する. ここで, $\tilde{\mathbf{m}}_{-v} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \dots, \tilde{m}_{z_n-1})$, $\tilde{\mathbf{m}}_{-v}^m = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{v-1}, m, \tilde{m}_{v+1}, \dots, \tilde{m}_{z_n-1})$ とすれば, $m_v = m$ ($m \in \{\tilde{m}_{v-1}, \dots, \tilde{m}_{v+1}\}$) の全条件付事後確率は, ベイズの法則より

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{m_v = m | \tilde{\mathbf{m}}_{-v}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{m}}_{-v}^m, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\Xi}, \boldsymbol{\theta})}{\sum_{m=\tilde{m}_{v-1}}^{\tilde{m}_{v+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{m}}_{-v}^m, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\Xi}, \boldsymbol{\theta})} \\ &= \frac{\omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v)}{\sum_{m=\tilde{m}_{v-1}}^{\tilde{m}_{v+1}} \omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v)} \end{aligned} \quad (31)$$

と表される. ただし,

$$\omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v) = \begin{cases} \pi^{\tilde{m}_n, m}(\tilde{s}_0) \pi^{m, \tilde{m}_2}(\tilde{s}_1) & v = 1 \\ \pi^{\tilde{m}_{v-1}, m}(\tilde{s}_{v-1}) \pi^{m, \tilde{m}_{v+1}}(\tilde{s}_v) & 2 \leq v \leq z_n - 2 \\ \pi^{\tilde{m}_{z_n-2}, m}(\tilde{s}_{z_n-2}) \pi^{m, \tilde{m}_{z_n}}(\tilde{s}_{z_n-1}) & v = z_n - 1 \end{cases} \quad (32)$$

である.

5. アルゴリズム

(1) MCMC 法

伝統的なベイズ統計学では, 共役な事前・事後分布を用いて, パラメータを推計する方法が採用される²⁷⁾. しかし, ハザードモデルの場合, 簡単な指数ハザードモデルを用いても, 共役事前確率分布が存在しないことが知られている³⁴⁾. 共役事前確率分布が存在しない場合, 数値解析により多重積分を求めることが必要となる. このことが, ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に, 大きな障害になっていた. しかし, 近年, MCMC 法^{27), 28)}がベイズ統計学の分野に導入され, 多重数値積分により基準化定数を求めなくても, 効率的に事後分布

を求めることが可能となった. その結果, ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる. すでに, MCMC 法を用いたベイズ推計法に関して, いくつかの研究が蓄積されている²⁷⁾. 代表的な MCMC 法として, ギブスサンプリング (Gibbs sampling) 法, メトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings: MH と略す) 法等が提案されている²⁷⁾. このうち, ギブスサンプリングはもともと画像復元のアルゴリズム³⁵⁾として知られていたが, ベイズ推計法における事後分布の推計に応用された³⁶⁾. ギブスサンプリング法, MH 法は, いずれも事後確率密度関数を直接求めることが難しい場合に, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて, 反復的にパラメータ β, γ のサンプルを乱数発生させることにより, 事後分布からパラメータサンプルを獲得する方法である. すでに, 筆者等は MCMC 法を用いて, マルコフ推移確率を効率的にベイズ推計できることを明らかにしている. 本研究では, 筆者等が提案したマルコフ劣化モデルのベイズ推計法¹⁶⁾を拡張し, MCMC 法を用いて階層的隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法を提案する.

隠れマルコフ劣化モデルを含む混合分布モデルの推計では, 前述したように尤度関数が特殊な形をしているため, 通常の方法やベイズ推計法を用いることが困難である^{29), 30)}. このようなことから, 混合分布モデルの推計方法として, 通常の方法ではなく, 完備化尤度関数を定義するとともに, MCMC 法を用いて混合分布モデルを推計する方法が提案されている²²⁾⁻³¹⁾. しかし, 既往の隠れマルコフ劣化モデルでは, マルコフ推移確率が定数で与えられ, これらの定数パラメータを集計的に推計するに留まっている. しかし, 本研究では, **3.** で言及したように, 多段階指数劣化ハザードモデルを用いて, マルコフ推移確率を推計する点に特徴がある. このような隠れマルコフ劣化モデルを推計するためには, 既往の隠れマルコフ劣化モデルを推計するための MCMC 法の中に, マルコフ推移確率のベイズ推計アルゴリズムを内包したような MCMC アルゴリズムを開発することが必要になる.

(2) 事後確率密度

4. で議論したように, 道路舗装を構成する道路区間 l において観測された路面性状調査結果に基づいて, 離散時間軸上の隣接する 2 つの調査時点 \bar{t}_n, \bar{t}_{n+1} に獲得されたデータのペア $\{\xi_n^l, \xi_{n+1}^l\}$ を 1 つのサンプルと考える. このようなサンプルに対して新しく添え字をつけ直し, 道路施設の路面性状調査に関するサンプルセット ξ^k ($k = 1, \dots, K$) を作成する. 任意のサンプル ξ^k は, データ $\xi_{n(k)}^{l(k)}, \xi_{n(k)+1}^{l(k)}$ のペアで構成される. $l(k)$ はサンプル k が対象とする道路区間の添え字を表し, $n(k)$ は当

該道路区間における調査履歴回数に該当する。すなわち、当該サンプルは道路区間 $l(k)$ において、調査時点 $\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}$ と $\bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}$ の路面性状調査結果を対象としていることを表す。また、サンプル k の調査期間 $[\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}, \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}]$ を、期間長 1 の単位期間の列 $[v^k, v^k + 1]$ ($v^k = 0, \dots, z^k - 1$) に細分化する。 z^k はサンプル期間 $[\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}, \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}]$ を構成する単位期間の個数であり、 $z^k = \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)} - \bar{t}_{n(k)}^{l(k)}$ と定義できる。このようなデータを用いて、階層的隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計する問題を考える。

まず、耐荷力の劣化ハザードモデル (2) に含まれるパラメータ $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_Q^s)$ は、未知パラメータである。これらの定数の事前確率密度関数として、正規分布を仮定しよう。すなわち、パラメータ β^s の事前確率密度関数が $\beta^s \sim \mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ である。ただし、 Q 次元正規分布 $\mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ の確率密度関数は、

$$\phi(\beta^s | \zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Q}{2}} \sqrt{|\Sigma^{s,\beta}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{\Sigma^{s,\beta}\}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right\} \quad (33)$$

となる。ただし、 $\zeta^{s,\beta}$ は $\mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ の事前期待値ベクトル、 $\Sigma^{s,\beta}$ は事前分散共分散行列である。

同様に、 γ^i ($i = 0, \dots, I - 1$) の事前確率密度関数も多次元正規分布に従うと考える。ただし、 $\gamma^0 = (\gamma_0^1 (= 1), \gamma_0^2, \dots, \gamma_0^S)$ 、 $\gamma^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_V^i)$ ($i = 1, \dots, I - 1$) である。ここで、 $\gamma^i \sim \mathcal{N}_{V^i}(\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma})$ を仮定する。ただし、 V^i 次元正規分布 $\mathcal{N}_{V^i}(\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma})$ の確率密度関数は、

$$\psi(\gamma^i | \zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{V^i}{2}} \sqrt{|\Sigma^{i,\gamma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{\Sigma^{i,\gamma}\}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \right\} \quad (34)$$

となる。ただし、 $\zeta^{i,\gamma}$ は事前期待値ベクトル、 $\Sigma^{i,\gamma}$ は事前分散共分散行列である。この時、完備化事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi})$ は、

$$\begin{aligned} \theta(\beta, \gamma | \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi}) &\propto \mathcal{L}(\beta, \gamma, \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi}) \\ &= \prod_{s=1}^{S-1} \phi(\beta^s | \zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta}) \prod_{i=0}^{I-1} \psi(\gamma^i | \zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma}) \\ &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \left[\sum_{l=\tilde{s}_{v^k}}^{\tilde{s}_{v^k+1}} \left\{ \prod_{s=\tilde{s}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\lambda_s^k}{\lambda_s^k - \lambda_l^k} \exp(-\lambda_l^k) \right\} \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=\tilde{m}_{v^k}}^{\tilde{m}_{v^k+1}} \left\{ \prod_{i=\tilde{m}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\mu_i^k}{\mu_i^k - \mu_l^k} \exp(-\mu_l^k) \right\} \right] \\ &\exp \left\{ -\sum_{s=1}^{S-1} \frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{\Sigma^{s,\beta}\}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{\Sigma^{i,\gamma}\}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

となる。

(3) ギブスサンプリング

階層的隠れマルコフ劣化モデルでは、事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \tilde{s}, \tilde{m}, \tilde{\Xi})$ を直接解析的に求めることができない。そこで、代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法^{35)–37)}を用いて、パラメータ β, γ の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する。式 (35) において、 β, γ は互いに独立であり、これらのパラメータの完備化条件付事後密度関数 $\theta(\beta^s | \tilde{s}, \tilde{\Xi})$ 、 $\theta(\gamma^i | \tilde{m}, \tilde{\Xi})$ は

$$\begin{aligned} \theta(\beta^s | \tilde{s}, \tilde{\Xi}) &\propto \\ &\prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \sum_{l=\tilde{s}_{v^k}}^{\tilde{s}_{v^k+1}} \left\{ \prod_{s=\tilde{s}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\lambda_s^k}{\lambda_s^k - \lambda_l^k} \exp(-\lambda_l^k) \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{\Sigma^{s,\beta}\}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right\} \quad (36a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\gamma^i | \tilde{m}, \tilde{\Xi}) &\propto \\ &\prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \sum_{l=\tilde{m}_{v^k}}^{\tilde{m}_{v^k+1}} \left\{ \prod_{i=\tilde{m}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\mu_i^k}{\mu_i^k - \mu_l^k} \exp(-\mu_l^k) \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{\Sigma^{i,\gamma}\}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \right\} \quad (36b) \end{aligned}$$

と表せる。また、潜在変数 m の全条件付事後分布は式 (31) で表される。以上のギブスサンプラーを用いた MCMC 法により、隠れマルコフ劣化モデルを推計することが可能となる。図-4 に、隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計するための具体的手順を整理している。読者の便宜を図るために、同図中には、推計法の詳細を説明する節番号や式番号を明記している。以下では、以上の各ステップの内容を、より詳細に説明する。

a) ステップ 1 初期値設定

事前分布 (33),(34) のパラメータベクトル (行列) $\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta}$ ($s = 1, \dots, S - 1$)、 $\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma}$ ($i = 1, \dots, I - 1$) の値を任意に設定する。潜在変数の初期値 $\tilde{s}^{k(0)} = (\tilde{s}_v^{k(0)} : v = 0, \dots, z_n^k), \tilde{m}^{k(0)} = (\tilde{m}_v^{k(0)} : v = 1, \dots, z_n^k - 1)$ ($k = 1, \dots, K$) を設定する。ただし、 $\tilde{s}^{k(0)}, \tilde{m}^{k(0)}$ は、それぞれ式 (25a),(25b) を満足する。さらに、パラメータ推計量の初期値 $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$ を任意に設定する。これらの初期値の影響は、MCMC 法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ、次第に薄れていく。MCMC のサンプル標本回数 r を $r = 1$ とする。

b) ステップ 2 パラメータ $\beta^{(r)}$ の標本抽出

ステップ 2 で用いるギブスサンプラーは式 (36a) で表される完備化条件付事後密度関数 $\rho(\beta^{(r)} | \tilde{s}^{(r-1)}, \tilde{\Xi})$ を用いて定義できる。仮想的健全度 $\tilde{s}^{(r-1)}$ と測定データ $\tilde{\Xi}$ を与件としたとき、完備化された $\beta^{s(r)}$ に関するギブスサンプラーは、任意の $e = 1, \dots, S - 1, q = 1, \dots, Q$ に対して

$$\hat{\theta}(\beta_q^e | \beta_{-q}^e, \tilde{s}^{(r-1)}, \tilde{\Xi})$$

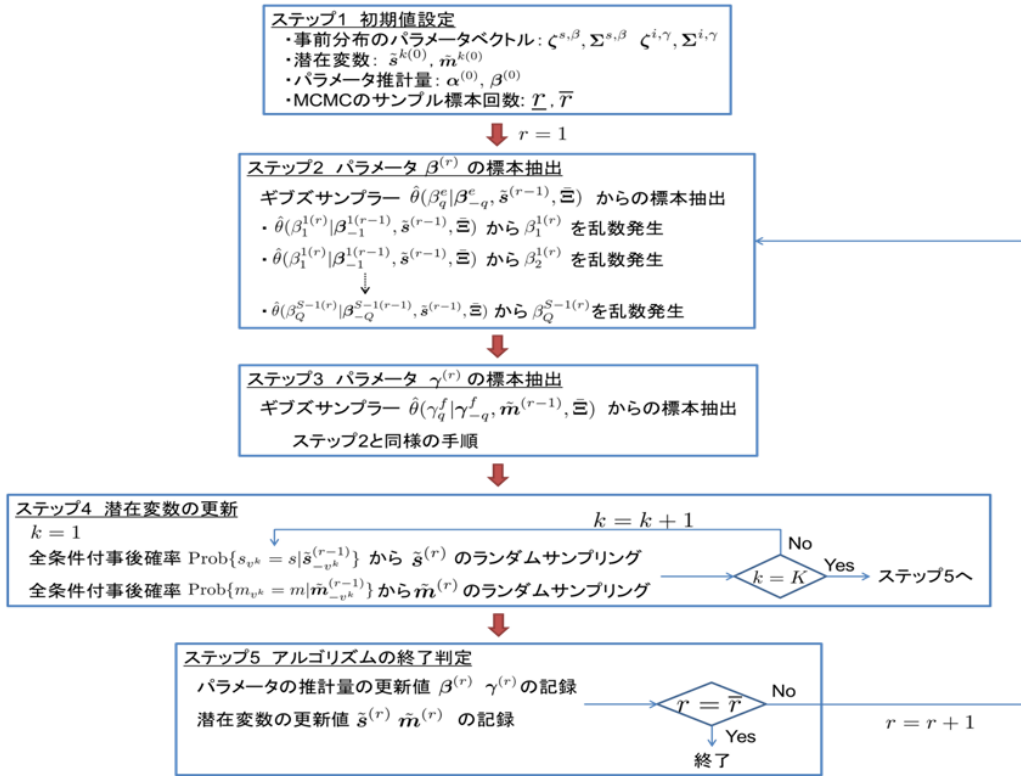


図-4 推計手順

$$\begin{aligned}
 & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \prod_{s=1}^{S-1} \prod_{r=s}^S \prod_{l=s}^{i-1} \left[\prod_{l=s}^{i-1} (\beta_q^s x_q^k)^{\delta_{sr}^{v^k} - \delta_{se}^{v^k}} \right. \\
 & \left. \sum_{h=s}^i \prod_{l=s, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\lambda_l^k - \lambda_h^k} \exp(-\lambda_h^k) \right]^{\delta_{sr}^{v^k}} \\
 & \exp \left\{ -\frac{\sigma_{qq}^e}{2} (\beta_q^e - \zeta_q^e)^2 \right\} \\
 & \hat{\zeta}_q^e = \zeta_q^e + \sum_{h=1, \neq q}^Q (\beta_h^e - \zeta_h^e) \sigma_{hq}^e \quad (37)
 \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、 $\delta_{se}^{v^k}$, $\delta_{sr}^{v^k}$ は

$$\begin{aligned}
 \delta_{se}^{v^k} &= \begin{cases} 1 & \tilde{s}_{v^k} = s = e \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (38) \\
 \delta_{sr}^{v^k} &= \begin{cases} 1 & \tilde{s}_{v^k} = s, \tilde{s}_{v^k+1} = r \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}
 \end{aligned}$$

となるダミー変数である。 ζ_q^e は事前期待値ベクトル ζ^e の第 q 要素であり、 σ_{hq}^e は事前分散共分散行列 $\{\Sigma^{e, \beta}\}^{-1}$ の第 (h, q) 要素である。また、 $\sum_{h=1, \neq q}^Q$ は 1 から Q までの要素のうち q を除いた要素の総和を意味する。このとき、 $\beta^{(r)} = (\beta_1^{(r)}, \dots, \beta_Q^{(r)})$ を以下の手順でランダムサンプリングする。

- ・ステップ 2-1 $\hat{\theta}(\beta_1^{(r)} | \beta_{-1}^{(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_1^{(r)}$ を乱数発生する。
- ・ステップ 2-2 $\hat{\theta}(\beta_2^{(r)} | \beta_{-2}^{(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_2^{(r)}$ を乱数発生する。

・ステップ 2-3 以下、同様の手順を繰り返す。

・ステップ 2-4 $\hat{\theta}(\beta_Q^{(r)} | \beta_{-Q}^{(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_Q^{(r)}$ を乱数発生する。

なお、本研究では、式 (37) から事後分布のパラメータ β の標本をサンプリングする手法として、適応的棄却サンプリング³⁷⁾を用いる。

c) ステップ 3 パラメータ $\gamma^{(r)}$ の標本抽出

多段階指数ハザードモデルのパラメータ $\gamma^{(r)}$ の標本を抽出する。未知パラメータベクトル γ^f ($f = 0, \dots, I-1$) から第 q ($q = 1, \dots, V$) 番目の要素 γ_q^f を除いた未知パラメータベクトルを γ_{-q}^f と表す。ただし、 $f = 0$ の時は、 q ($q = 2, \dots, S-1$) である。この時、式 (36b) より、 γ_{-q}^f を既知とした時の γ_q^f のギブスサンプラー $\hat{\theta}(\gamma_q^f | \gamma_{-q}^f, \tilde{m}^{(r-1)}, \Xi)$ は、任意の $f = 0, \dots, I-1, q = 1, \dots, V$ ($f = 0$ の時は $q = 2, \dots, S-1$) に対して

$$\begin{aligned}
 & \hat{\theta}(\gamma_q^f | \gamma_{-q}^f, \tilde{m}^{(r-1)}, \Xi) \\
 & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=1}^{z^k-1} \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{l=i}^{i-1} \left[\prod_{l=i}^{i-1} (\gamma_q^i x_q^k)^{\delta_{ij}^{v^k} - \delta_{if}^{v^k}} \right. \\
 & \left. \sum_{h=i}^i \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\mu_l^k - \mu_h^k} \exp(-\mu_h^k) \right]^{\delta_{ij}^{v^k}} \\
 & \exp \left\{ -\frac{\sigma_{qq}^f}{2} (\gamma_q^f - \hat{\zeta}_q^f)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\zeta}_q^f = \zeta_q^f + \sum_{h=1, h \neq f}^V (\gamma_h^f - \zeta_h^f) \sigma_{hq}^f \quad (39)$$

と表せる. ただし, $\delta_{if}^{v^k}$, $\delta_{ij}^{v^k}$ は

$$\delta_{if}^{v^k} = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_{v^k} = i = f \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{v^k} = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_{v^k} = i, \tilde{m}_{v^k+1} = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となるダミー変数である. ζ_q^f は事前期待値ベクトル ζ^f の第 q 要素であり, σ_{hq}^f は事前分散共分散行列 $\{\Sigma^{f,\gamma}\}^{-1}$ の第 (h, q) 要素である. 以上のギブスサンプラーを用いて, ステップ 3 と同様の手順によりサンプル標本 $\gamma^{(r)}$ を得ることができる.

d) ステップ 4 潜在変数の更新

全条件付事後確率 (31) に基づいて, 新しい潜在変数 $\tilde{s}^{(r)}, \tilde{m}^{(r)}$ をランダムサンプリングする. まず, 潜在変数ベクトル $\tilde{s}_{-v^k}^{(r-1)} = (\tilde{s}_1^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{z^k-1}^{(r-1)})$ を定義する. この時, $s_{v^k}^{(r)} \in \{\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}\}$ の全条件付事後確率は,

$$\text{Prob}\{s_{v^k} = s | \tilde{s}_{-v^k}^{(r-1)}\} = \frac{\omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)})}{\sum_{s=\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}}^{\tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}} \omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)})} \quad (40)$$

と表される. ただし,

$$\omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}) = \begin{cases} p^{\tilde{s}_0^{(r-1)}} s p^{\tilde{s}_2^{(r-1)}} & v^k = 1 \\ p^{\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}} s p^{\tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}} & 2 \leq v^k \leq z^k - 2 \\ p^{\tilde{s}_{z^k-2}^{(r-1)}} s p^{\tilde{s}_{z^k}^{(r-1)}} & v^k = z^k - 1 \end{cases} \quad (41)$$

と表される. 同様に, 舗装路面の劣化過程の特性により, 条件 (25a) が成立する. ここで, $\tilde{m}_{-v^k}^{(r-1)} = (\tilde{m}_1^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{z^k-1}^{(r-1)})$ を定義する. この時, $m_{v^k} = m$ ($m \in \{\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}\}$) の全条件付事後確率は, ベイズの法則より

$$\text{Prob}\{m_{v^k} = m | \tilde{m}_{-v^k}^{(r-1)}\} = \frac{\omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)})}{\sum_{m=\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}}^{\tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}} \omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)})} \quad (42)$$

と表される. ただし,

$$\omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)}) = \begin{cases} \pi^{\tilde{m}_{n(k)}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_0^{(r-1)}) \pi^{m, \tilde{m}_2^{(r-1)}(\tilde{s}_1^{(r-1)}) & (v^k = 1 \text{ の時}) \\ \pi^{\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}) \pi^{m, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}(\tilde{s}_{v^k}^{(r-1)}) & (2 \leq v^k \leq z^k - 2 \text{ の時}) \\ \pi^{\tilde{m}_{z^k-2}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{z^k-2}^{(r-1)}) \pi^{m, \tilde{m}_{n(k)+1}(\tilde{s}_{z^k-1}^{(r-1)}) & (v^k = z^k - 1 \text{ の時}) \end{cases}$$

である. すべての k ($k = 1, \dots, K$) に対して, $v^k = 1$ より逐次, 潜在変数 $\tilde{s}_{v^k}^{(r)}$ ($v^k = 1, \dots, z^k$), $\tilde{m}_{v^k}^{(r)}$ ($v^k = 0, \dots, z^k - 1$) を求める.

e) ステップ 5 アルゴリズムの終了判定

以上で求めたパラメータ推計量の更新値 $\beta^{(r)}, \gamma^{(r)}$, 潜在変数の更新値 $\tilde{m}^{(r)}, \tilde{s}^{(r)}$ を記録する. $r \leq \bar{r}$ の場合, $r = r+1$ として, ステップ 2 へ戻る. そうでない場合, アルゴリズムを終了する.

なお, 以上のアルゴリズムの初期段階においては, パラメータの初期値設定の影響が残存している. このため, シミュレーション回数 r が十分大きな値になるまでは, パラメータ標本の発生過程が定常過程に到達していないと考え, 発生したパラメータ標本を除去することが望ましい. ここで, パラメータ標本として採用するシミュレーション回数 r の最小値を \underline{r} と表す. すなわち, ギブスサンプリングで求めたサンプル $\beta^{(r)}, \gamma^{(r)}$ ($r = \underline{r} + 1, \underline{r} + 2, \dots, \bar{r}$) を, 事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \Xi)$ からの標本と見なすこととする. したがって, これらの標本を用いて, パラメータベクトル β, γ の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる. なお, ギブスサンプリングの定常性に関しては, 次節で述べる Geweke の検定統計量を用いて判断できる.

(4) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて, パラメータベクトル β, γ に関する統計的性質を分析することができる. MCMC 法を用いた場合, パラメータの事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \Xi)$ を解析的な関数として表現することはできない. 得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる. いま, ギブスサンプリングから得られた標本を $\theta^{(r)} = (\beta^{(r)}, \gamma^{(r)})$ ($r = 1, \dots, \bar{r}$) と表す. このうち, 最初の \underline{r} 個の標本は収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{r} + 1, \dots, \bar{r}\}$ と定義する. パラメータ β と γ に関する統計量を同様の方法で定義できるため, 以下ではパラメータ β に焦点を絞って議論する. まず, パラメータ β の同時確率分布関数 $G(\beta)$ は

$$G(\beta) = \frac{\#\{\beta^{(r)} \leq \beta, r \in \mathcal{M}\}}{\bar{r} - \underline{r}} \quad (44)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{\beta^{(r)} \leq \beta, r \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\beta^{(r)} \leq \beta, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である. また, パラメータ β^s の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}^s(\beta^s)$, 分散・共分散行列 $\tilde{\Sigma}^s(\beta^s)$ は, それぞれ

$$\tilde{\zeta}^s(\beta^s) = (\tilde{\zeta}(\beta_1^s), \dots, \tilde{\zeta}(\beta_Q^s))'$$

$$= \left(\sum_{r=r+1}^{\bar{r}} \frac{\beta_1^{s(r)}}{\bar{r}-r}, \dots, \sum_{r=r+1}^{\bar{r}} \frac{\beta_Q^{s(r)}}{\bar{r}-r} \right)' \quad (45a)$$

$$\tilde{\Sigma}^s(\beta^s) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_1^s) & \cdots & \tilde{\sigma}(\beta_1^s \beta_Q^s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_Q^s \beta_1^s) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\beta_Q^s) \end{pmatrix} \quad (45b)$$

と表される. ただし, $q = 1, \dots, S-1$ に対して

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_q^s) = \sum_{r=r+1}^{\bar{r}} \frac{\{\beta_q^{s(r)} - \tilde{\zeta}(\beta_q^s)\}^2}{\bar{r}-r} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\beta_q^s \beta_r^s) \\ = \sum_{r=r+1}^{\bar{r}} \frac{\{\beta_q^{s(r)} - \tilde{\zeta}(\beta_q^s)\} \{\beta_r^{s(r)} - \tilde{\zeta}(\beta_r^s)\}}{\bar{r}-r} \end{aligned} \quad (46b)$$

である. また, ギブスサンプリングによる標本を用いて, パラメータ β の信用域を定義できる. たとえば, パラメータ β の $100(1-2\varepsilon)\%$ 信用域は, 標本順序統計量 $(\beta_q^{s,\varepsilon}, \bar{\beta}_q^{s,\varepsilon})$ ($s = 1, \dots, S-1; q = 1, \dots, Q$)

$$\begin{aligned} \beta_q^{s,\varepsilon} &= \arg \max_{\beta_q^{s*}} \\ &\left\{ \frac{\#\{\beta_q^{s(r)} \leq \beta_q^{s*} \in \mathcal{M}\}}{\bar{r}-r} \leq \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_q^{s,\varepsilon} &= \arg \min_{\beta_q^{s**}} \\ &\left\{ \frac{\#\{\beta_q^{s(r)} \geq \beta_q^{s**} \in \mathcal{M}\}}{\bar{r}-r} \leq \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (47b)$$

を用いて $\beta_q^{s,\varepsilon} < \beta_q^s < \bar{\beta}_q^{s,\varepsilon}$ と定義できる.

MCMC 法では, 初期パラメータ値 $\theta^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. ギブスサンプリングで発生させた \bar{r} 個のサンプルのうち, 最初の r 個の標本 $\theta^{(r)} = (\beta^{(r)}, \gamma^{(r)})$ ($r = 1, \dots, r$) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える. その上で, 第 $r+1$ 回以降の標本をとりあげる. $r+1$ 以降の標本が, 不変分布である事後分布からの標本であるかどうかを Geweke の方法³⁸⁾を用いて仮説検定を試みる. いま, パラメータのギブス標本 $\theta^{(r)}$ ($r = 1, \dots, \bar{r}$) の中から, 最初の r_1 個と最後の r_2 個のデータを取りあげよう. Geweke は, $r_1 = 0.1(\bar{r}-r), r_2 = 0.5(\bar{r}-r)$ を推奨している³⁸⁾. この時, パラメータ β の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は,

$$Z_{\beta_q^s} = \frac{1\bar{\beta}_q^s - 2\bar{\beta}_q^s}{\sqrt{\nu_1^2(\beta_q^s) + \nu_2^2(\beta_q^s)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (48)$$

$$1\bar{\beta}_q^s = \frac{\sum_{r=r+1}^{r+r_1} \beta_q^{s(r)}}{r_1} \quad 2\bar{\beta}_q^s = \frac{\sum_{r=\bar{r}-r_2+1}^{\bar{r}} \beta_q^{s(r)}}{r_2}$$

$$\nu_1^2(\beta_q^s) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_q^s}^1(0)}{r_1} \quad \nu_2^2(\beta_q^s) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta_q^s}^2(0)}{r_2}$$

と定義できる. ただし, $f_{\beta_q^s}^l(x)$ ($l = 1, 2$) はスペクトル

密度関数であり, $2\pi f_{\beta_q^s}^l(0)$ の推定値は

$$2\pi \hat{f}_{\beta_q^s}^l(0) = 1\hat{\omega}_0 + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) l \hat{\omega}_q^s \quad (49)$$

$$1\hat{\omega}_0 = r_1^{-1} \sum_{r=r+1}^{r+r_1} (\beta_q^{s(r)} - 1\bar{\beta}_q^s)^2$$

$$2\hat{\omega}_0 = r_2^{-1} \sum_{r=\bar{r}-r_2+1}^{\bar{r}} (\beta_q^{s(r)} - 2\bar{\beta}_q^s)^2$$

$$1\hat{\omega}_q^s = r_1^{-1} \sum_{r=r+1}^{r+r_1} (\beta_q^{s(r)} - 1\bar{\beta}_q^s)(\beta_q^{s(r-s)} - 1\bar{\beta}_q^s)$$

$$2\hat{\omega}_q^s = r_2^{-1} \sum_{r=\bar{r}-r_2+1}^{\bar{r}} (\beta_q^{s(r)} - 2\bar{\beta}_q^s)(\beta_q^{s(r-s)} - 2\bar{\beta}_q^s)$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{\nu + 1}$$

として求まる³⁹⁾⁻⁴¹⁾. ν はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが, Geweke に従って 20 を採用する³⁸⁾. ここで, β_q^s の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\beta_q^s}| \leq Z_{\nu/2} \\ H_1 : |Z_{\beta_q^s}| > Z_{\nu/2} \end{cases} \quad (50)$$

と設定する. ただし, $Z_{\nu/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である. 有意水準 $\nu\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合, $Z_{\nu/2}$ は $\nu/2\% = 1 - \Phi(Z_{\nu/2})$ を満足する値として定義できる. ただし, $\Phi(Z)$ は標準正規分布の分布関数である.

6. 適用事例

(1) データベースの概要

本研究で提案した方法論を NEXCO 各社が管理する高速道路舗装の劣化予測問題に適用し, 方法論の有効性を実証的に検討する. 本研究で用いたデータは, 高速道路総合技術研究所が実施した舗装健全度調査の結果であり, 全 755 道路区間, 合計 1,510 回の路面性状調査と FWD を用いたたわみ度調査が実施されている. 対象道路区間では, 複数の時間断面において調査が実施されている. 対象区間では, 路面補修は実施されているものの, 道路建設時点から舗装更新は実施されていない. 建設時点に関するデータが利用可能であるため, 建設時点から最初の調査時点までの期間, 調査時点から次の調査時点に至るまでの期間のそれぞれを 1 単位のサンプルデータと定義した. このような考え方で階層的隠れマルコフ劣化モデルを推計するためのデータベースを整備した. モデル推計に用いたサンプル数は 1,510 個となる. 以上の方法で作成したサンプルデータの特性を表-1 に整理している.

路面性状調査では 50m 区間を基本単位として, 路面

表-1 サンプルデータの特性

総延長	37.75km					
敷設年度	1963年～2005年					
総道路区間数	755					
総サンプル数	1,510					
大型車交通量	平均 4,572 台/日 (81～19,347)					
耐荷力別 サンプリング状況	健全度 (耐荷力)	1	2	3	4	5
	サンプル数	710	495	201	82	22
	サンプルの割合	47%	33%	13%	5%	1%

健全度を評価する。さらに、50mを基本単位とする路面性状調査結果に基づいて補修箇所を選定する。つまり、路面性状調査では比較的長い区間を一斉調査し、その調査結果から損傷が進行している区間を50m区間ごとに判定し、補修する区間を選定する。路面性状調査では、1) ひび割れ、2) わだち掘れ、3) IRI という3種類の損傷タイプのそれぞれに対して路面健全度に関する情報が得られる。補修基準値は、3つの損傷ごとに予め設定されており、ある舗装区間の3つの損傷のいずれかの値が補修基準値に達すれば、要補修区間として判別される。本研究では、3種類の損傷の中で、劣化の進展が早いとされるひび割れに着目して、路面健全度を定義する。ひびわれは、調査対象範囲を小メッシュに分割し、ひび割れが存在するメッシュの割合で評価する。ひび割れ率に基づいて、路面健全度を表-2に示すように定義した。健全度5の状態が使用限界である。一方、路面性状調査を実施した対象区間において、FWDを用いたたわみ測定も実施されている。本適用事例では、たわみ測定の結果に基づいて、アスファルト層の健全度をD指標

$$D = \frac{D_0 - D_{90}}{\Delta} \quad (51)$$

を用いて評価する。ただし、 D_0, D_{90} は、それぞれ重錘の載荷点直下、および載荷点から90cm離れた地点のたわみ量(mm)、 Δ はアスファルト層の設計厚(mm)を表す。さらに、D指標を表-3に示すように離散化し、耐荷力健全度を定義した。耐荷力ランク5は使用限界を意味している。耐荷力が健全度5に到達した場合、アスファルト層全体の更新が実施されることになる。

(2) 推計結果

表-2で設定した路面健全度の中で、健全度5を除く合計4つの健全度に対して路面健全度ハザード率(10)をモデル化した。あわせて、表-3に示す5個の耐荷力ランクに対して、耐荷力5を除く4つのランクに対して、耐荷力ハザード率(2)を定式化した。式(10)に示したように、路面健全度ハザード率には、耐荷力ランクに応じて劣化ハザードが比例的に変化することを表すパラメータ γ_0^s ($s = 1, \dots, S-1$)が含まれる。パラメータ

表-2 路面健全度

健全度	ひび割れ率 (%)
1	$Cr = 0$
2	$0 < Cr \leq 2.5$
3	$2.5 < Cr \leq 5$
4	$5 < Cr \leq 10$
5	$10 < Cr$

表-3 舗装耐荷力ランク

耐荷力ランク	FWD
1	$D \leq 400$
2	$400 < D \leq 800$
3	$800 < D \leq 1,200$
4	$1,200 < D \leq 1,600$
5	$1,600 < D$

の識別可能条件より、 $S-1$ 個のパラメータ γ_0^s のうち、 γ_0^1 を1に基準化する。すべての s ($s = 2, \dots, S-1$)に対して、近似的に $\gamma_0^s = 1$ が成立する場合、路面健全度ハザード率と耐荷力ハザード率が独立であり、耐荷力ランクの低下が路面健全度に影響を及ぼすという階層的劣化仮説を棄却できる。このような階層的劣化仮説の統計的検定の問題は、のちに6.(3)で議論する。

路面健全度ハザード率に影響を及ぼす要因として、地域区分、舗装種別、舗装厚、道路構造特性、交通量等を候補として取り上げた。一方、耐荷力ハザード率に関しても同様の変数を説明変数の候補として取り上げ、これら候補となる説明変数すべての組み合わせに対して階層的隠れマルコフ劣化ハザード関数を推計した。舗装厚、交通量のような定量的パラメータに関しては、サンプル中の最大値が1となるように基準化した。すなわち、これらの説明変数は $[0, 1]$ の値を取り得る。説明変数の組み合わせの中で、符号条件およびGeweke検定を満足しないような変数の組を除外し、最終的にはベイズファクター^{15), 39)-41)}を最大にするような変数の組み合わせを採用することとした。以上のように推計した階層的隠れマルコフ劣化ハザードモデルのうち、表-4には耐荷力の低下過程を表すハザードモデルを、表-5に

表-4 パラメータの推計結果 (耐荷力)

耐荷力	定数項 β_1^s	大型車交通量 β_2^s	平均ハザード率 $E[\lambda^s]$	期待寿命 ET^s (年)
1	-3.012 (-3.082,-2.943) 0.386	- (-) -	0.049	20.328
2	-2.307 (-2.414,-2.204) 0.125	0.576 (0.420,0.730) 1.024	0.114	8.766
3	-2.090 (-2.218,-1.965) 0.401	0.567 (0.406,0.723) 0.670	0.141	7.071
4	-2.439 (-2.595,-2.284) 1.762	- (-) -	0.087	11.462

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータサンプルの期待値、第2行はパラメータ推計値の95%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。

表-5 パラメータの推計結果 (路面健全度)

健全度	定数項 γ_1^i	大型車交通量 γ_2^i	平均ハザード率 $E[\mu^i(1)]$	期待寿命 $ET^i(1)$ (年)
1	-2.271 (-2.361,-2.184) 0.844	0.086 (-0.062,0.234) 0.148	0.105	9.494
2	-2.170 (-2.290,-2.052) 0.527	- (-) -	0.114	8.758
3	-1.553 (-1.696,-1.406) 1.615	- (-) -	0.212	4.726
4	-1.996 (-2.150,-1.842) 1.414	- (-) -	0.136	7.360

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータサンプルの期待値、第2行はパラメータ推計値の95%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。 $E[\mu^i(1)]$ は $s=1$ の場合における路面健全度 i の期待ハザード率、 $ET^i(1)$ (年)は $s=1$ の場合における路面健全度 i の期待寿命を表す。スケールパラメータ γ^0 の推計値に関しては別途表-6に示す。

は路面の劣化過程を表すハザードモデルの推計結果を示している。また、耐荷力に依存する路面劣化速度の異質性を表すスケールパラメータの推計結果を表-6に示す。なお、MCMC法のギブスサンプリングを実施する際に、マルコフ連鎖が定常状態に到達するためのサンプル数として $r=3,000$ を設定した。表-4から表-6に示す通り、Geweke検定統計量はいずれも1.96を下回っており、有意水準5%でパラメータのランダムサンプリングが定常状態に収束したことを意味する収束仮説を棄却できないことがわかる。したがって、本研究では $\bar{r}=13,000$ と設定し、 $r=3,000$ 個の標本を事後分布に収束する過程からの標本として除き、残りの10,000個のパラメータ標本を用いて分析を行うこととした。1例として、耐荷力に関する健全度2のときの階層的隠れマルコフ劣化ハザード関数の未知パラメータ

表-6 スケールパラメータの推計結果 (γ^0)

健全度	スケールパラメータ γ_0^s
$s=2$	1.170 (1.046,1.452) 0.429
$s=3$	1.629 (1.418,2.233) 0.124
$s=4$	2.348 (1.961,3.421) 1.054

β_1^2 と β_2^2 の確率分布を図-5と図-6に示す。当然のことながら、同図中に記載したそれぞれの確率分布の標本平均および95%信用域は表-5と一致している。

表-7 パラメータの推計結果 (路面健全度)

路面健全度	耐荷力健全度 (s=1)		s=2		s=3		s=4	
	$ET^s(s)$	$E[T](i s)$ (年)	$ET^s(s)$	$E[T](i s)$	$ET^s(s)$	$E[T](i s)$	$ET^s(s)$	$E[T](i s)$
1	0.111	8.996	0.123	8.143	0.171	5.847	0.247	4.056
2	0.121	8.286	0.133	7.500	0.186	5.385	0.268	3.736
3	0.224	4.456	0.248	4.033	0.345	2.896	0.498	2.009
4	0.144	6.946	0.159	6.287	0.222	4.514	0.319	3.132

注) 各健全度ごとに, $E[\mu^i(s)]$ は耐荷力 s における路面健全度 i の期待ハザード率を, $ET^s(s)$ は耐荷力 s を与件とする路面健全度 i の期待寿命 (年) を表す.

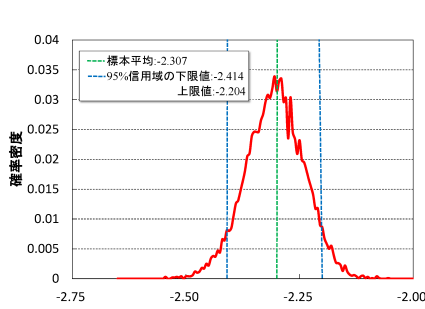


図-5 β_1^2 のサンプリング

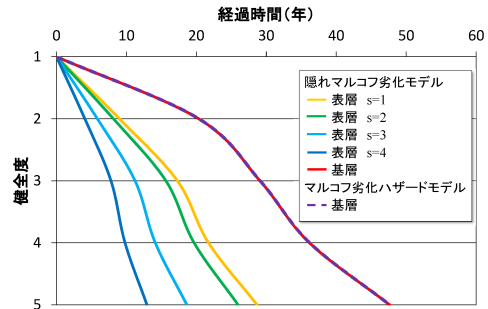


図-7 パフォーマンスカーブ

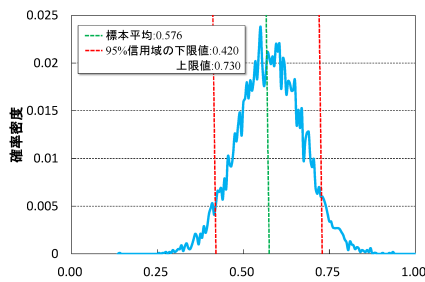


図-6 β_2^2 のサンプリング

耐荷力ハザード率 λ^s , 路面健全度ハザード率 $\mu^i(s)$ を用いれば, 当該区間における耐荷力 s の期待寿命 (劣化状態がさらに進展するまでの所要時間) ET^s と, 耐荷力が s の場合における路面健全度 i の期待寿命 $ET^i(s)$ は, それぞれ

$$ET^s = \int_0^\infty \exp(-\lambda^s y^s) dy^s = \frac{1}{\lambda^s} \quad (52a)$$

$$ET^i(s) = \frac{1}{\mu^i(s)} \quad (52b)$$

と定義できる¹¹⁾. 先に示した表-4には, 耐荷力ランクごとに期待ハザード率, 期待寿命を併記している. 同様に, 表-5には路面健全度ごとに, 期待ハザード率, $s=1$ の場合における路面健全度 i の期待寿命を示している. さらに, 表-7には, 耐荷力 s のそれぞれに対して求めた路面健全度別の期待ハザード率, 期待寿命を一括して示している. この表より, 耐荷力健全度の低下に伴って, 路面健全度の期待寿命が短くなっている

ことが理解できる.

さらに, 舗装が更新 (建設) されてから, 耐荷力が s ($s=2, \dots, S$) にまで低下するのに要する平均的所要時間 $E[T](s)$ は,

$$E[T](s) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{\lambda^k} \quad (53)$$

と定義できる. 式 (53) は, 道路建設時点から, 耐荷力が s ($s=2, \dots, S$) に進展するまでに要する平均的所要時間を表しており, 耐荷力パフォーマンスカーブと呼ぶ. 同様に, 耐荷力が s に留まることを前提として, 路面補修後に路面健全度が i ($i=2, \dots, I$) まで劣化するために要する平均的所要時間 $E[T](i|s)$ は,

$$E[T](i|s) = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{1}{\mu^l(s)} \quad (54)$$

と表される. 式 (54) は耐荷力 s の下での路面健全度のパフォーマンスカーブであり, 以下では s -パフォーマンスカーブと呼ぶ.

図-7には, 階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いて推計した耐荷力パフォーマンスカーブ, s -パフォーマンスカーブを示している. 同図に示すように, 耐荷力が使用限界 $s=5$ に到達するまでの平均的所要時間は約 47.6 年を要している. 一方, 路面健全度が使用限界 $i=5$ までに到達するまでの寿命は, いずれの耐荷力ランクにおいても短くなっており, 耐荷力より寿命が短いことが理解できる. 耐荷力が低下する (s の値が大きくなる) ほど路面健全度の劣化速度が大きくなっている. 具体

表-8 パラメータの推計結果 (FWD 測定値のみを用いた推計結果)

耐荷力	定数項 β_1^s	大型車交通量 β_2^s	平均ハザード率 $E[\lambda^s]$	期待寿命 ET^s (年)
1	-3.013 (-3.085,-2.943) 0.109	- (-) -	0.049	20.348
2	-2.306 (-2.414,-2.198) 0.825	0.575 (0.421,0.730) 0.253	0.114	8.759
3	-2.091 (-2.218,-1.964) 0.509	0.565 (0.407,0.721) 0.170	0.141	7.082
4	-2.438 (-2.593,-2.286) 1.087	- (-) -	0.087	11.450

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータサンプルの期待値、第2行はパラメータ推定値の95%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。

的に $s = 1$ と $s = 4$ のときの路面のパフォーマンスカーブを比較すると、前者の期待寿命が約28.7年、後者が約12.9年であり、後者が前者の約2.2倍劣化が早くなっている。このことは耐荷力が低下した場合、路面補修だけでなく舗装全体を対象とした補修・更新が必要となることを示唆している。

なお、表-8にはFWD調査結果のみを用いたマルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推計結果を、図-7にはその推計結果に基づく耐荷力パフォーマンスカーブを併記している(紫色破線)。同表と同図に示すように、FWD調査結果のみを用いた単純な耐荷力パフォーマンスカーブと、階層的隠れマルコフ劣化モデルの推計結果に基づいて求めた耐荷力パフォーマンスカーブは、ほぼ同じ推計結果となっている。耐荷力パフォーマンスカーブのみを求めるためには、FWD調査結果に基づいて耐荷力パフォーマンスカーブを推計することで十分である。しかし、耐荷力が路面健全度の劣化速度に及ぼす影響を推計するためには、FWD調査を実施しない限り耐荷力に関する情報が獲得できないため、本研究で提案したような階層的隠れマルコフ劣化モデルを開発することが必要となる。

(3) 階層的劣化仮説の検定

本研究で提案した階層的隠れマルコフ劣化モデルは、「耐荷力の低下が路面健全度の劣化速度に影響を及ぼす」という階層的劣化仮説が成立することを前提としている。階層的劣化仮説を検定するために、階層的劣化仮説が成立しない状況を帰無仮説 H_0^s ($s = 2, \dots, S-1$) を

$$H_0^s; \gamma_0^s = 1 \tag{55}$$

と定式化する。これに対して、対立仮説 H_1^s ($s = 2, \dots, S-1$) を

$$H_1^s; \gamma_0^s \neq 1 \tag{56}$$

と定式化する。MCMCに基づいて帰無仮説を検定するために、式(47a),(47b)を用いて標本順序統計量 $(\underline{\gamma}_0^{s,\varepsilon}, \bar{\gamma}_0^{s,\varepsilon})$ ($s = 2, \dots, S-1$)

$$\underline{\gamma}_0^{s,\varepsilon} = \arg \max_{\gamma_0^{s**}} \left\{ \frac{\#(\gamma_0^{s(r)} \leq \gamma_0^{s**} \in \mathcal{M})}{\bar{r} - \underline{r}} \leq \varepsilon \right\} \tag{57a}$$

$$\bar{\gamma}_0^{s,\varepsilon} = \arg \min_{\gamma_0^{s**}} \left\{ \frac{\#(\gamma_0^{s(r)} \geq \gamma_0^{s**} \in \mathcal{M})}{\bar{r} - \underline{r}} \leq \varepsilon \right\} \tag{57b}$$

を用いて有意水準 ε に対する信用域 $[\underline{\gamma}_0^{s,\varepsilon}, \bar{\gamma}_0^{s,\varepsilon}]$ を定義する。 γ_0^s の信用域 $[\underline{\gamma}_0^{s,\varepsilon}, \bar{\gamma}_0^{s,\varepsilon}]$ の中に値1が含まれている場合、帰無仮説 H_0^s は棄却できない。一方、含まれていない場合は、帰無仮説 H_0^s は棄却される。実際に今回の推計結果に対して、有意水準を $\varepsilon = 0.05$ と設定したときの信用域は表-6に示した通りである。いずれの健全度に対しても信用域に値1を含んでいない。したがって、帰無仮説 H_0^s は棄却され、対立仮説である階層的劣化仮説は棄却できないと判断される。

(4) 実用化への示唆

道路舗装の劣化過程には多くの不確実性が介在しており、劣化過程を確定的に予想することは困難である。路面性状調査により、路面の劣化状態(以下、路面健全度と呼ぶ)を観測することができる。マルコフ劣化モデルを用いることにより、実際の路面性状調査結果に基づいて、現実の実態に即した劣化過程を予測することが可能となった。一方、道路を長期間にわたり利用す

ることにより、路面だけでなく道路舗装全体の劣化が進展し、舗装耐荷力が低下する。階層的劣化仮説が成立する場合、耐荷力が低下することにより、路面の劣化速度が増加する。このため、舗装耐荷力が低下した道路区間においては路面だけでなく、舗装全体の補修(以下、舗装の更新と呼ぶ)を行うことにより、期待ライフサイクル費用を低減化できる可能性がある。本研究で提案した階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いることにより、耐荷力パフォーマンスカーブと耐荷力に応じた路面健全度の劣化過程を表す s -パフォーマンスカーブを同時に推計することができる。今後、本研究で求めたパフォーマンスカーブを用いたマルコフ決定モデルを定式化することにより、期待ライフサイクル費用の低減化に資するような路面補修政策と舗装全体の補修更新政策を同時に求めることが必要となる。また、階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いて、耐荷力に応じた路面健全度の劣化速度を相対的に評価しておくことにより、実務において、ある時点の路面の劣化速度が初期の劣化速度と比較して閾値よりも早くなれば、当該区間を FWD 調査や補修更新の候補として選定することができる。

さらに、本研究においてはモデル推計手法としてベイズ推計を採用している。これまで示してきたように、ベイズ推計を行うことで未知パラメータの信用域を算出することが可能である。図-8 には一例として、図-7 の耐荷力のパフォーマンスカーブと $s = 4$ のときの路面の s -パフォーマンスカーブに対する 95%信用域を示している。同一の条件下にある舗装であったとしても、耐荷力で 42.4 年～53.7 年(期待寿命 47.6 年からの変動幅: -10.9%～12.8%)、 $s = 4$ の路面で 11.9 年～24.3 年(変動幅: -36.2%～30.6%) の変動を確認することができる。実務においては劣化過程の平均値を把握することに加え、劣化過程の変動幅を定量的に把握することが重要である。これにより変動幅を考慮した予算計画立案や管理が可能となるだけでなく、変動幅を超えて劣化が進展するような舗装区間を早期に抽出することや補修を実施することが可能となる。すなわち、アセットマネジメントを包括するような総合的なリスクマネジメントを視野に入れた維持管理を実践することができようになる。

7. おわりに

本研究では、路面健全度の劣化過程と耐荷力の低下過程で構成される複合的劣化過程を表現するために階層的隠れマルコフ劣化モデルを提案した。すなわち、舗装の耐荷力が低下することにより、路面健全度の劣化速度が大きくなるという階層的劣化仮説を設定し、耐

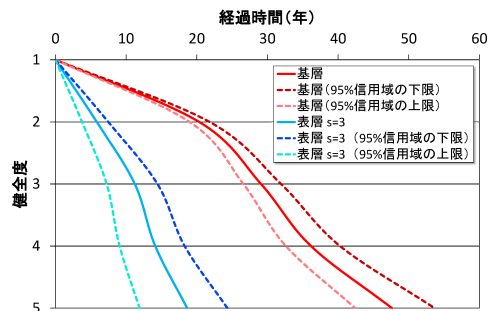


図-8 パフォーマンスカーブの 95%信用域

荷力の低下過程を齊次マルコフ過程で表現し、路面健全度の劣化過程を耐荷力の状態に依存して路面健全度の劣化速度が変化するような非齊次マルコフ過程として表現した。さらに、路面性状調査と FWD 調査結果に基づいて、階層的隠れマルコフ劣化モデルを MCMC 法により推計する方法論を提案した。さらに、高速道路を対象とした実証分析の結果、少なくとも適用事例に関する限り階層的劣化仮説が統計的に棄却できないことを明らかにした上で、階層的隠れマルコフ劣化モデルを実際に推計し、提案したモデルの有効性を実証的に検証した。しかし、本研究で提案した階層的隠れマルコフ劣化モデルに関して、今後に残された研究課題がある。第 1 に、本研究で提案した階層的隠れマルコフ劣化モデルは、道路舗装以外にも多様なタイプの社会基盤施設の劣化予測に適用することが可能である。ただし、社会基盤施設により複合的劣化過程のメカニズムが多様に異なることが予想される。現実の適用事例を通じて階層的隠れマルコフ劣化モデルの拡張を試みる必要がある。第 2 に、表層の劣化状態が耐荷力に影響を及ぼすため、厳密には路面の健全度と耐荷力を独立した指標と見なしにくい側面がある。現在のところ、筆者らの知る限り舗装各層の劣化状態を定義・測定する方法は開発されていない。舗装構造の劣化モデルを開発するためには、舗装各層の劣化判定を行うための舗装工学的知見の蓄積が必要である。第 3 に、本研究で推計した路面健全度と耐荷力のパフォーマンスカーブを用いて、ライフサイクル費用の低減に資するような舗装の最適補修・更新戦略を分析することが可能である。さらに、路面性状調査、FWD 調査の最適実施タイミングに関する分析が必要である。最後に、本研究適用事例でとりあげた路線に関しては階層的劣化仮説は棄却されなかった。今後、他の高速道路路線において FWD 調査結果を蓄積し、路面・耐荷力の標準的なパフォーマンスカーブを推計するとともに、実用的な調査タイミング、補修・更新政策に関する知見を蓄

積することが必要である。

なお、本研究の一部は、国土交通省、平成 22 年度建設技術研究開発助成制度実用化研究開発「アジア諸国を対象とした社会資本アセットマネジメントのデファクト標準化戦略」(研究代表者：河野広隆)の助成を受けるとともに、文部科学省「若手研究者の自立的な研究環境整備促進」事業によって大阪大学グローバル若手研究者フロンティア研究拠点にて実施された。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- 1) (財)道路保全技術センター：活用しよう！FWD, pp.18, 2005.
- 2) 阿部長門, 丸山暉彦, 姫野賢治, 林正則：たわみ評価指標に基づく舗装の構造評価, 土木学会論文集, No.460/V-18, pp.41-48, 1993.
- 3) 保田敬, 小林潔司：BMS における点検結果と状態推移確率が LCC に及ぼす影響, 建設マネジメント論文集, 土木学会, Vol.11, pp.111-122, 2004.
- 4) Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- 5) 杉崎光一, 貝戸清之, 小林潔司：目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.52A, pp.781-790, 2006.
- 6) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 7) Gouriéroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 8) Tobin, J.: Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, Vol.26, pp.24-36, 1958.
- 9) Amemiya, T. and Boskin, M.: Regression analysis when the dependent variable is truncated lognormal, with an application to the determinants of the duration of welfare dependency, *International Economic Review*, Vol.15, pp.485, 1974.
- 10) Mishalani, R. and Madanat, S. : Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, *ASCE Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, pp.139-148, 2002.
- 11) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 12) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 13) 貝戸清之, 熊田一彦, 林秀和, 小林潔司：階層型指数劣化ハザードモデルによる舗装ひび割れ過程のモデル化, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.3, pp.386-402, 2007.
- 14) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司：競合的劣化ハザードモデル：舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
- 15) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2006.
- 16) 貝戸清之, 小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 17) 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也：サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
- 18) 貝戸清之, 山本浩司, 小濱健吾, 岡田貢一, 小林潔司：ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル：大規模情報システムへの適用, 土木学会論文集 F, Vol.64, No.2, pp.115-129, 2008.
- 19) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 20) 小林潔司, 貝戸清之, 林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008.
- 21) 貝戸清之, 森悠, 藤原栄吾, 小林潔司, 橋本拓己：相対評価モデルを用いた舗装構造の劣化診断, 土木計画学研究・講演集, No.42, CD-ROM, 2010.
- 22) Diebolt, J. and Robert, C.P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.
- 23) MacDonald, I.L. and Zucchini, W.: *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*, Chapman & Hall, 1997.
- 24) Hamilton, J.: A new approach to the economic analysis of nonstationary series and the business cycle, *Econometrica*, Vol.57, No.2, pp.357-384, 1989.
- 25) Diebold, F.X. and Inoue, A.: Long memory and regime switching, *Journal of Econometrics*, Vol.105, pp.131-159, 2001.
- 26) Kim, C.-J. and Nelson, C.R.: *State-Space Models with Regime Switching : Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press, 1999.
- 27) 和合肇：ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
- 28) 伊庭幸人：計算統計学のフロンティア—計算統計 II, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, 2005.
- 29) Titterton, D.M., Smithe, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons., 1985.
- 30) Robert, C.P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
- 31) Robert, C.P., Rydén, T. and Titterton, D.M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.62, pp.57-75, 2000.
- 32) Dempster, A.P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.39, pp.1-38, 1977.
- 33) Celeux, G., Hurn, M. and Robert, C.P.: Computational and inferential difficulties with mixture posterior distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.95, pp.957-970, 2000.
- 34) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.
- 35) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.
- 36) Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.: Sampling-based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85, pp.398-409, 1990.
- 37) Gilks, W.R. and Wild, P.: Adaptive rejection sam-

- pling for Gibbs sampling, *Applied Statistics*, Vol.41, pp.337-348, 1992.
- 38) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in Bernardo, J.M., Berger, J.M., Dawid, A.P. and Smith, A.F.M.(eds.) :*Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 39) Chib, S.: Marginal likelihood from Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 40) Newey, W. K. and West, K. D.: A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 41) Han, C. and Carlin, B.P.: MCMC methods for computing Bayes factors, A comparative review, *Biometrika*, Vol.84, pp.711-732, 2000.

(2011. 5. 13 受付)

A HIERARCHICAL HIDDEN MARKOV DETERIORATION MODEL FOR PAVEMENT STRUCTURE

Kiyoshi KOBAYASHI, Kiyoyuki KAITO, Toshiyuki EGUCHI, Akira OHI
and Ryosuke OKIZUKA

The deterioration process of pavement is a complex process including the deterioration of road surface and the decrease in load bearing capacity of the entire pavement. The decrease in load bearing capacity influences the deterioration rate of road surface. The soundness of road surface can be observed by a road surface condition investigation. On the other hand, the decrease in load bearing capacity can be partially observed through the FWD testing, etc. In this study, such a deterioration process of road surface is described as a mixed Markov process that depends on the load bearing capacity of pavement. Then, the complex deterioration process, which is composed of the deterioration of road surface and the decrease in load bearing capacity of pavement, is expressed as a hierarchical hidden Markov deterioration model. Through a case study of the application into the expressway, a hierarchical hidden Markov deterioration model is estimated, and its applicability and effectiveness are empirically discussed.