土木学会論文集A1(構造・地震工学), Vol. 68, No. 3, 738-753, 2012.

TV-VARモデルの階層ベイズ推計による列車走行時の橋梁振動数の同定

松岡弘大[1]・貝戸清之[2]

[1]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]正会員　大阪大学准教授　大学院工学研究科地球総合工学専攻（同上）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

列車走行時の橋梁では列車質量の影響に伴い固有振動数が見かけ上低下する．しかしながら，その影響を実橋計測データから実証的に検証した事例は見当たらない．本研究では列車走行時の橋梁の固有振動数の見かけ上の低下を橋梁の実測加速度応答から評価するために，多変量自己回帰（VAR）モデルの VAR 係数が時間とともに確率的に変動（Time varying）する TV-VAR モデルを定式化し，さらに階層ベイズ法による未知パラメータ推計手法を構築する．数値計算事例と列車走行時の橋梁の実測加速度応答への適用により，1) 提案手法が固有振動数の変化を精度よく評価できること，2) 列車走行時の橋梁では実際に固有振動数が見かけ上低下すること，3) その低下量は本研究の対象橋梁で平均 14%，最大 20%程度であることを明らかにした．

Key Words : *time series analysis, vibration properties, TV-VAR, hierarchical Bayesian estimation*

1. はじめに

鉄道橋における列車走行時の共振現象は重要な工学的課題の一つである．列車走行時の共振現象は多数連結された車両による規則的加振周期と橋梁の固有振動数が近接することで発生する[1)−4)]．鉄道構造物等設計標準[5),6)]（以下，設計標準）においては共振の発生を避ける目的で剛性の下限値を設けている．しかし，低剛性桁など，設計標準の適用範囲外の橋梁の増加に伴い，安全の確保を前提としつつも共振をある程度許容する設計も提案されている[7)]．このとき，橋梁の固有振動数を正確に把握することが重要となるが，列車走行時の橋梁には列車質量が加わっているために橋梁の固有振動数は見かけ上低下する（橋梁単体の固有振動数は変化しない）．固有振動数の見かけ上の低下は共振が発生する列車速度の低下を意味する．これまで，列車走行中の橋梁の固有振動数の見かけ上の変化量を明らかにするために，数値シミュレーションを利用した検討がなされている[1)]．一方で，実橋梁での検証は以下で述べる分析上の問題によりほとんど実施されていない[8),9)]．

実橋梁で観測した時系列データから列車走行時の固有振動数の見かけ上の低下を把握するためには，時系列データを微小区間に分割し，それぞれの微小区間における固有振動数を逐次同定することが必要となる．固有振動数を含めた振動特性の同定手法はこれまでに数多く提案されているが，いずれも対象としている時系列データが数秒程度の時間的長さ（時間長）を有していることが前提となっている[10)]．特に周波数領域における同定手法[11),12)]では，時間長の不足は周波数分解能の低下を招く．比較的短い時間長で分析する際には時系列データに 0 ベクトルを付加するなどの対処が不可欠である[13),14)]．一方で，比較的短い時間長を対象する場合には時間領域における同定手法が有効であることが指摘されている[15),16)]．それでも列車の車軸通過ごとに発生する固有振動数の見かけ上の変化を捉えるには，さらに微小区間を対象とした同定手法の開発が必要である[17)]．

一方で，時間領域での同定手法は経済分野で時系列解析として知られ，近年，長足の進歩を遂げている[18)−21)]．その 1 つとしてモデルパラメータの時間的変化を許容した時変係数モデルの開発があげられる[21)]．そこで本研究では，時間領域における先端的手法である，多変量自己回帰モデル（Vector Autoregressive Model : VAR）の AR 係数行列に時間的変化（Time-varying : TV）を許容した TV-VAR モデル[20),21)]に着目し，実測加速度応答から固有振動数の見かけ上の変化の抽出を試みる．また，TV-VAR モデルは未知パラメータの数が膨大であるうえに，パラメータ間に階層性が存在することから，その推計方法と，推計精度の確保が課題となる．本研究では TV-VAR モデルをベイズ統計学の枠組みで捉える．これにより，未知パラメータを確率分布として推計し，その分布の統計量からパラメータの値を決定するために，一般的な最適解の点推定で問題となる局

所解の存在や初期値依存性，推計過程の発散といった問題を回避することが可能である．さらに本研究ではパラメータの分布の設定を工夫することで推計効率の向上を図るとともに，パラメータの階層性を考慮可能な階層ベイズ推計法を構築する．

以下，**2.** で VAR モデルを，**3.** で VAR モデルの AR 係数行列が時間的に変化する TV-VAR モデルを定式化する．**4.** では TV-VAR モデルの未知パラメータ推計法として階層ベイズ推計について説明する．さらに，**5.** で数値計算への適用事例を，**6.** で実橋梁への適用事例をそれぞれ示す．

2. 構造物の動的応答と時系列モデル

(1) 運動方程式と VAR モデル

物理空間座標における N 自由度離散系の構造物の運動方程式は，

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (t = 1, \cdots, T) \tag{1}$$

と定義できる．式中，$\mathbf{M}$ は質量行列，$\mathbf{C}$ は減衰行列，$\mathbf{K}$ は剛性行列であり，それぞれ $N \times N$ 次元の正方行列である．また，$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_N(t)]^T$，$\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \cdots, f_N(t)]^T$ は N 次元の変位ベクトルと外力ベクトルを，右上の添え字 T は転置をそれぞれ表す．さらに，式中の T は対象時間長を表す．ここで，運動方程式の初期条件が 0 であると仮定すると，ラプラス変換により，

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s) \tag{2}$$

と表される．また，

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{F}(s) \tag{3}$$

である．なお，伝達関数 $\mathbf{H}$ は，

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}} \tag{4}$$

と定義できる．いま，式 (4) の伝達関数 $\mathbf{H}$ に着目する．対象構造物が固有モードを有する場合，式 (4) は分母が 0 となる極を有する（固有モードは伝達関数に見られるピーク成分を意味し，振動特性と区別して用いている）．ある 1 つの固有モードに対して存在する 1 組の極に着目すれば，因数分解により，

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{(s\mathbf{I} + \mathbf{U})(s\mathbf{I} + \mathbf{U}^*)} = \frac{\mathbf{Q}}{(s\mathbf{I} + \mathbf{U})} - \frac{\mathbf{Q}^*}{(s\mathbf{I} + \mathbf{U}^*)} \tag{5}$$

と変形できる．なお，$\mathbf{I}_{(N\times N)}$ は単位行列，* は複素共役をそれぞれ表す．また，$\mathbf{U}_{(N\times N)}$ と $\mathbf{Q}_{(N\times N)}$ は $\mathbf{M}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{K}$ の各要素より算出される．式 (5) をラプラス逆変換することで，

$$\mathbf{h}_c(t) = \mathbf{Q} \cdot \exp(\mathbf{U}t) - \mathbf{Q}^* \cdot \exp(\mathbf{U}^*t) \tag{6}$$

を得る．$\mathbf{h}_c$ は時間領域におけるインパルス応答であり，連続時間の関数となっている．実際の観測応答は Δ 時間ごとの観測値の系列であることから，$t = m\Delta$ とすると，離散時間系におけるインパルス応答は，

$$\mathbf{h}(m) = \Delta[\mathbf{Q} \cdot \exp(\mathbf{U}m\Delta) - \mathbf{Q}^* \cdot \exp(\mathbf{U}^*m\Delta)] \quad (m = 1, \cdots, M) \tag{7}$$

となる．なお，M は対象時間内の総サンプル数を表す．さらに，式 (7) を Z 変換すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(m) z^{-m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \Delta\{\mathbf{Q}\exp(\mathbf{U}m\Delta)z^{-m} - \mathbf{Q}^*\exp(\mathbf{U}^*m\Delta)z^{-m}\} \\
&= \Delta\left\{\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{I} - \exp(\mathbf{U}\Delta)z^{-1}} - \frac{\mathbf{Q}^*}{\mathbf{I} - \exp(\mathbf{U}^*\Delta)z^{-1}}\right\} \\
&= \left\{\Delta(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*) + \frac{\Delta\mathbf{Q}\exp(\mathbf{U}\Delta) - \mathbf{Q}^*\exp(\mathbf{U}^*\Delta)}{z}\right\} \\
&\quad \cdot \left\{\mathbf{I} - \frac{\exp(\mathbf{U}\Delta) + \exp(\mathbf{U}^*\Delta)}{z} + \frac{\exp(\mathbf{U}\Delta + \mathbf{U}^*\Delta)}{z^2}\right\}^{-1} \\
&= \frac{\tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1 z^{-1}}{\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_1 z^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}_2 z^{-2}}
\end{aligned} \tag{8}$$

と導出できる．なお，

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \Delta(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*) \tag{9a}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \Delta\{\mathbf{Q}\exp(\mathbf{U}\Delta) - \mathbf{Q}^*\exp(\mathbf{U}^*\Delta)\} \tag{9b}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = -\exp(\mathbf{U}\Delta) - \exp(\mathbf{U}^*\Delta) \tag{9c}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \exp(\mathbf{U}\Delta + \mathbf{U}^*\Delta) \tag{9d}$$

である．一方で，式 (1) を直接 Z 変換した場合には，

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z) \cdot \mathbf{F}(z) \tag{10}$$

の関係式が得られる[22),23)]．式 (10) に式 (8) を代入すると，

$$(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_1 z^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}_2 z^{-2})\mathbf{Y}(z) = (\tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1 z^{-1})\mathbf{F}(z) \tag{11}$$

となる．さらに，Z 座標系で表現された式 (11) を逆 Z 変換で離散時間系に戻すことにより，N 自由度離散系の構造物の 1 つの固有モードの応答は，

$$\mathbf{y}(m) + \tilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{y}(m-1) + \tilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{y}(m-2) = \tilde{\mathbf{B}}_0\mathbf{f}(m) + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{f}(m-1) \tag{12}$$

と VARMA（Vector AutoRegressive Moving Average）モデルとして表現できる．上記のモデルの $\tilde{\mathbf{A}}$ を AR 係数行列，$\tilde{\mathbf{B}}$ を MA 係数行列と呼ぶ．なお，N 自由度離散系の構造物の複数の固有モードに着目した場合にも，同様の導出手順により VARMA モデルで表現することが可能である．このとき，式 (5) は固有モードの数に対応した数の極を有するために，最終的な VARMA モデルの次数が増加する．

VARMA モデルは無限次元の VAR モデルと等価であることを踏まえ[15),24)]，本研究では p 次元の VAR モデルによりこれを近似する．これにより，N 自由度離散系の構造物の応答は，

$$\mathbf{y}(m) = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j \mathbf{y}(m-j) + \varepsilon'(m) \tag{13}$$

と表現される．また，$\varepsilon'(m)_{\ (N\times1)}$ は，$\mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon)$ に従う白色雑音である．さらに，$\mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon)$ は平均ベクトルが $\bar{\mathbf{y}}_{\ (N\times1)}$，分散共分散行列が $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\ (N\times N)}$ の N 次元ガウス分布を表す．一般的には，$\bar{\mathbf{y}}$ を $\mathbf{a}_0$ とし，$\mathbf{y}'(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{a}_0$ を用いて，

$$\mathbf{y}'(m) = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j \mathbf{y}'(m-j) + \varepsilon(m) \tag{14}$$

と表される．このとき，$\varepsilon(m)_{\ (N\times1)}$ は，$\mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon)$ に従う白色雑音である．

(2) VAR モデルと構造物の振動特性

式 (13) の下で再び Z 変換により伝達関数を算出すると，

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{\mathbf{I} - \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j z^{-j}} \tag{15}$$

となる．構造物の固有モードは伝達関数のピーク成分を意味することから，

$$\det\left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j z^{-j}\right) = 0 \tag{16}$$

を満足する．これは，新たに定義する行列 $\mathbf{\Phi}_{(Np\times Np)}$，

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \cdots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

の固有値 $\lambda_{(Np\times1)}$ を計算することと等価である．固有値 λ は

$$\det(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Phi}) = 0 \tag{18}$$

により算出することができる．対象とする構造物の固有振動数 γ とモード減衰比 ζ は，λ を用いて以下の式によりそれぞれ導出できる[22)−24)]．

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\Delta}\sqrt{\{\mathrm{Re}(\ln\lambda)\}^2 + \{\mathrm{Im}(\ln\lambda)\}^2} \tag{19}$$

$$\zeta = \frac{-\mathrm{Re}(\ln\lambda)}{\sqrt{\{\mathrm{Re}(\ln\lambda)\}^2 + \{\mathrm{Im}(\ln\lambda)\}^2}} \tag{20}$$

なお，Re および Im は複素数の実部，および虚部をそれぞれ表す．さらに，i 次の固有値 λ_i に対応した振動モード形 $\mathbf{q_i}_{\ (N\times1)}$ は，

$$(\mathbf{I}\lambda_i^p - \mathbf{A}_1\lambda_i^{p-1} - \cdots - \mathbf{A}_{p-1}\lambda_i - \mathbf{A}_p)\mathbf{q_i} = 0 \tag{21}$$

より導出できる．このように，構造物の固有振動数やモード減衰比，振動モード形といった振動特性は AR 係数行列より算出できるために，振動特性の同定問題は AR 係数行列の推計問題に帰着する．VAR モデルの推計手法についての詳細は文献[25),26)]を参照されたい．

3. TV-VAR モデル

(1) パラメータの時間的変化

AR 係数行列の時間的変化を許容する TV-VAR モデルのモデル化に先立ち，VAR モデル（式 (14)）を，

$$\mathbf{y}'(m) = \mathbf{Z}(m)\alpha + \varepsilon(m) \tag{22}$$

と再定義する．$\varepsilon(m)_{\ (N\times1)}$ は，$\mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon)$ に従う白色雑音である．なお，

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}_{(kN\times1)} \tag{23}$$

$$\mathbf{Z}(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(m) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_2(m) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{z}_N(m) \end{bmatrix}_{(N\times kN)} \tag{24}$$

であり，各要素はそれぞれ，

$$\alpha_n = [\mathbf{a}_0(n), \mathbf{A}_1(1,n), \cdots, \mathbf{A}_1(N,n), \mathbf{A}_2(1,n), \cdots, \mathbf{A}_p(N,n)]^T \tag{25}$$

$$\mathbf{z}_n(m) = [1, \mathbf{y}^T(m-1), \cdots, \mathbf{y}^T(m-p)]^T \tag{26}$$

である．また，$k = 1 + Np$ である．式 (22) より VAR モデルが回帰モデルとして表現できることがわかる．

ここで列車の走行とともに橋梁の固有振動数が見かけ上変化することを考える．**2.(2)** で説明したように時系列の周波数情報はすべて AR 係数行列に集約されている．さらに式 (22) ではこれらの情報はすべて α で表される．すなわち，振動数が見かけ上変化することを表現するためには，

$$\alpha = \alpha(m) \tag{27}$$

と拡張すればよい．このとき，未知パラメータの数は AR 係数行列だけでも $kNM \simeq pN^2M$ 個となり，それらを NM 個のデータから推計することは明らかに過剰なモデリングとなってしまう．そこで，列車走行時の見かけ上の固有振動数の時間関数が連続となることを考慮して，各離散時点 m における AR 係数行列を収納した未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ に対して以下に示すランダムウォーク過程を導入する．

$$\alpha(m) = \alpha(m-1) + \mathbf{u}(m) \tag{28}$$

ただし，$\mathbf{u}(m)_{(N\times1)}$ は，$\mathcal{N}(0,\mathbf{\Sigma}_u)$ に従う白色雑音である．これは，離散時点 m の未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ が 1 期前の離散時点 $m-1$ の未知パラメータベクトル $\alpha(m-1)$ に依存して確率的に変化することを表している．確率的な変化の度合い（歩幅）は $\mathcal{N}(0,\mathbf{\Sigma}_u)$ に従う．列車走行に伴う固有振動数の見かけ上の変化量は，理論的には列車の各車軸の進入から橋梁中央通過時にかけて徐々に増加し，逆に各車軸の退出にかけて徐々に減少する．したがって，式 (28) に従うランダムウォーク過程に基づき，$\alpha(m)$ を状態変数と考え推計することにより見かけ上の固有振動数の変化を表現可能であると考えられる．

以上より，TV-VAR モデルは式 (28) および，

$$\mathbf{y}'(m)=\mathbf{Z}(m)\alpha(m)+\varepsilon(m) \tag{29}$$

として定式化される．TV-VAR モデルを状態空間モデルと考えた場合，式 (29) が観測モデル，式 (28) が状態モデルである．また階層モデルと考えた場合，式 (28) がパラメータの事前分布となる．なお，2 つの任意の離散時点 s，m において $\varepsilon(s)$ と $\mathbf{u}(m)$ は独立であることに留意されたい．

(2) TV-VAR モデルと構造物の振動特性

TV-VAR モデルを推計することにより，すべての離散時間 ($m=1,\cdots,M$) で VAR 係数行列 $\mathbf{A}_{j,m}(j=1,\cdots,p)$ をそれぞれ得ることができる．このとき，離散時点 m における構造物の固有モードは VAR モデルの場合と同様に，行列 $\mathbf{\Phi}(m)_{(Np\times Np)}$，

$$\mathbf{\Phi}(m)=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{1,m} & \mathbf{A}_{2,m} & \cdots & & \mathbf{A}_{p,m}\\ \mathbf{I} & 0 & \cdots & & 0\\ 0 & \mathbf{I} & \cdots & & 0\\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I} & 0\end{bmatrix} \tag{30}$$

により計算することができる．なお，離散時間 m の固有値 $\lambda(m)$ は

$$\det(\mathbf{I}\lambda(m)-\mathbf{\Phi}(m))=0 \tag{31}$$

を満たす値である．また，離散時点 m における構造物の固有振動数 $\gamma(m)$ とモード減衰比 $\zeta(m)$ は，$\lambda(m)$ を用いて以下のようにそれぞれ導出できる．

$$\gamma(m)=\frac{1}{2\pi\Delta}\sqrt{\{\mathrm{Re}(\ln\lambda(m))\}^2+\{\mathrm{Im}(\ln\lambda(m))\}^2} \tag{32}$$

$$\zeta(m)=\frac{-\mathrm{Re}(\ln\lambda(m))}{\sqrt{\{\mathrm{Re}(\ln\lambda(m))\}^2+\{\mathrm{Im}(\ln\lambda(m))\}^2}} \tag{33}$$

さらに，i 次の固有値 $\lambda_i(m)$ に対応した振動モード形 $\mathbf{q_i}(m)_{(N\times1)}$ は，

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}\lambda_i(m)^p-\mathbf{A}_{1,m}\lambda_i(m)^{p-1}-\cdots\\ -\mathbf{A}_{p-1,m}\lambda_i(m)-\mathbf{A}_{p,m})\mathbf{q_i}(m)=0\end{aligned} \tag{34}$$

より導出できる．このように，TV-VAR モデルから離散時点 m における構造物の固有振動数やモード減衰比，振動モード形がそれぞれ導出される．本研究では各離散時点におけるこれらの特性値を，瞬間固有振動数，瞬間モード減衰比，瞬間振動モード形と呼称する．なお，TV-VAR モデルではこれらの振動特性に加え，以下の式により離散時点 m における計測点 n_a の瞬間パワースペクトル，および計測点 n_a と計測点 n_b の瞬間伝達関数を算出することが可能である[15]．

$$P_{n_a}(f,m)=\frac{\Sigma_\varepsilon(n_a,n_a)}{\Upsilon(n_a)^2} \tag{35}$$

$$H_{n_a,n_b}(f,m)=\frac{\Sigma_\varepsilon(n_a,n_b)}{\Upsilon(n_a)\Upsilon(n_b)} \tag{36}$$

$$\Upsilon(n)=\left|1-\sum_{j=1}^{p}A_{j,m}(n,n)\exp(-2\pi ijf)\right| \tag{37}$$

なお，$\Sigma_\varepsilon(n_a,n_b)$ は誤差項の分散共分散行列の n_a 行 n_b 番目の要素を，$A_{j,m}(n,n)$ は時点 m における AR 係数行列の n 行 n 列の要素をそれぞれ表す．また，$-1/(2\Delta)\leq f\leq 1/(2\Delta)$ である．

4. 階層ベイズ推計

(1) ベイズ推計と事前分布の階層化

本研究では式 (28)，および式 (29) で表される TV-VAR モデルを階層ベイズ推計する．未知パラメータを確率分布として扱うベイズ推計の適用により推計値の信頼区間についても議論が可能となる．特に，TV-VAR モデルのように未知パラメータが非常に多い場合には，カルマンフィルターを始めとする逐次推計手法を利用したとしてもいくつかの未知パラメータは最尤法を基本とした数値最適化を必要とする[27]．このとき，尤度関数が複数峰となるような場合には局所解へ収束したり，発散してしまうことも少なくない．これに対してグリッドサーチといった，よりグローバルな最適解の探索手法も検討されている[28]．一方で，ベイズ推計の枠組みにおいては，これらの尤度関数の特徴を踏まえた未知パラメータの確率分布が推計可能である[29]．さらに，正規分布を基本とした TV-VAR モデルは後で述べるように，各パラメータに対して共役な確率分布が存在するために，理論的に簡潔な形となる上，効率よく推計を行うことが可能となる[30),31]．

一般的なベイズ推計手法では，未知パラメータの事前情報である事前分布と，観測情報 $\mathbf{\Xi}$ に基づいて定義される尤度関数を用いて，未知パラメータを事後分布と呼ばれる確率分布として推計する．いま，尤度関数を $\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)$ と表す．ここで，$\theta=(\alpha(1),\cdots,\alpha(M),\mathbf{\Sigma}_\varepsilon,\mathbf{\Sigma}_u)$ は未知パラメータ集合を表す．さらに，θ が確率変数で，事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ に従うと仮定する．時系列デー

タ $\mathbf{\Xi}$ が与件であるとき，未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\mathbf{\Xi})$ はベイズの定理により，

$$\pi(\theta|\mathbf{\Xi}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta}\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{38}$$

と表すことができる．ただし，Θ はパラメータ空間である．このとき，式 (38) 右辺の分母は基準化定数であることから，同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\mathbf{\Xi})$ は，

$$\pi(\theta|\mathbf{\Xi}) \propto \mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)\pi(\theta) \tag{39}$$

となる．さらに，事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ は，

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= \pi(\alpha(1),\cdots,\alpha(M),\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon},\mathbf{\Sigma}_{u})\\ &= \pi(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon})\pi(\alpha(1),\cdots,\alpha(M)|\mathbf{\Sigma}_{u})\pi(\mathbf{\Sigma}_{u})\\ &= \pi(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon})\prod_{m=1}^{M}\pi(\alpha(m)|\alpha(m-1),\mathbf{\Sigma}_{u})\\ &\quad\cdot\pi(\alpha(0))\pi(\mathbf{\Sigma}_{u})\end{aligned} \tag{40}$$

と展開される．式 (40) では事前確率密度関数のパラメータがさらに別の事前確率密度関数となっているような階層構造として表現されていることがわかる．事前確率密度関数が階層構造を有するモデルは階層ベイズモデルと呼称される．さらに，未知パラメータ間の階層性を階層ベイズモデルとして捉え，すべてのパラメータを一括して推計する手法は階層ベイズ推計と総称される[32),33)]．TV-VAR モデルが通常の階層ベイズモデルと異なるのは，ある離散時点 m における未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ の事前確率密度関数が 1 期前の離散時点 $m-1$ の未知パラメータベクトル $\alpha(m-1)$ に依存するだけでなく，時間を通じた共通の未知パラメータ（ここでは $\mathbf{\Sigma_u}$）に対しても階層化されている点にある．

(2) 事後確率密度関数の定式化

事後確率密度関数は式 (39) で示されるように，尤度関数 $\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)$ と事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ により構成される．まず，尤度関数 $\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta)$ に着目する．未知パラメータ $\theta = [\alpha(1),\cdots,\alpha(M),\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon},\mathbf{\Sigma}_{u}]^T$ がある値 $\tilde{\theta} = [\tilde{\alpha}(1),\cdots,\tilde{\alpha}(M),\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon},\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{u}]^T$ で与えられたときに多変量時系列データ $\mathbf{\Xi}$ が観測される同時生起確率（尤度）は，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\mathbf{\Xi}|\theta) =\\ &\prod_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N\sqrt{|\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon}|}}\right.\\ &\left.\cdot\exp\left(\frac{(\mathbf{y}'(m)-\tilde{\mathbf{y}}'(m))^T\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{y}'(m)-\tilde{\mathbf{y}}'(m))}{2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{41}$$

であり，平均ベクトル $\tilde{\mathbf{y}}'(m)$，分散共分散行列 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon}$ の多変量正規分布に基づいて具体化される．なお，

$$\tilde{\mathbf{y}}'(m) = \mathbf{Z}(m)\tilde{\alpha}(m) \tag{42}$$

である．

つぎに事前確率密度関数を具体化する．まず，式 (41) 中の多変量正規分布の平均ベクトル $\tilde{\mathbf{y}}'(m)$ の事前確率密度関数は，$\tilde{\mathbf{y}}'(m)$ と $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}$ が独立であると仮定すると，**3.(1)** で述べた式 (28) より，

$$\alpha(m) \sim \mathcal{N}(\alpha(m-1),\mathbf{\Sigma}_{u}) \tag{43}$$

となる．式 (43) は共役事前分布である．さらに式 (41) で示される多変量正規分布の分散共分散行列 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon}$ についても共役事前分布が存在し，以下のように事前確率密度関数を設定することができる．

$$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon} \sim \mathcal{IW}(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 0},\nu_{\varepsilon 0},N) \tag{44}$$

なお，$\mathcal{IW}$ で示す逆ウィシャート分布は，ウィシャート分布 $\mathcal{W}$ の逆数が従う分布である．N 個の確率変数が従う自由度 ν_0，分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}_0$ のウィシャート分布の確率密度関数は，

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}^{-1}|\mathbf{\Sigma}_0,\nu_0,N) =\\ &\qquad\mathbf{\Psi}|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{\nu_0-N-1}{2}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1})}{2}\right\}\end{aligned} \tag{45}$$

と定義される．また，

$$\mathbf{\Psi}^{-1} = 2^{\frac{N\nu_0}{2}}\pi^{\frac{N(N-1)}{4}}|\mathbf{\Sigma}_0|^{\frac{N}{2}}\prod_{n=1}^{N}\Gamma\left(\frac{\nu_0-n+1}{2}\right) \tag{46}$$

である．なお，式 (45) 中の $\mathrm{Tr}(\cdot)$ は行列のトレースを，式 (46) 中の $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数をそれぞれ表す．観測値と推計値に関する分散共分散行列 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\varepsilon}$ と同様に式 (43) の離散時点 m と離散時点 $m-1$ に関する分散共分散行列 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{u}$ に対しても，共役事前確率密度関数として，逆ウィシャート分布，

$$\mathbf{\Sigma}_{u} \sim \mathcal{IW}(\mathbf{\Sigma}_{u0},\nu_{u0},N) \tag{47}$$

を設定する．

以上までで設定した尤度（式 (41)）と事前確率密度関数（式 (43)，式 (44)，式 (47)）を式 (39) に代入することにより同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\mathbf{\Xi}) = \pi(\alpha(1),\cdots,\alpha(M),\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon},\mathbf{\Sigma}_{u}|\mathbf{y}'(1),\cdots,\mathbf{y}'(M))$ を定義することができる．一方で同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\mathbf{\Xi})$ は式 (38) 右辺の多重積分を解析的に解くことが困難であることから，以下で述べる数値的解法を採用する必要がある．

(3) 条件付き事後確率密度関数の定式化

同時事後確率密度関数が直接算出できない場合に，数値計算によりこれを近似する確率密度関数を得る方法として MCMC（Markov chain Monte Carlo）法がある[19)]．特に，複数の条件付き事後確率密度関数から数値的に同時事後確率密度関数を求める方法としてギブス法が有名であり，本研究でもギブス法を適用する．ギブス法では順番，もしくはランダムに選択した各未知パラメータに関する条件付き事後確率密度関数からの乱数発生を繰り返す．これをギブスサンプリングと呼

ぶ．ギブスサンプリングに必要となる各未知パラメータの条件付き事後確率密度関数の算出に先立ち，以下の表記法を導入しておく．未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ をまとめて $\mathbf{\Lambda} = [\alpha(1), \cdots, \alpha(M)]$ とし，$\mathbf{\Lambda}$ から任意の未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ を削除した部分集合 $[\alpha(1), \cdots, \alpha(m-1), \alpha(m+1), \cdots, \alpha(M)]$ を $\mathbf{\Lambda}_{-m}$ と表記する．

まず，任意の離散時点 m における未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ の条件付き事後確率密度関数を定式化する．単純に考えれば，未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ に関する他のすべてのパラメータの条件付き事後確率密度関数（全条件付き事後確率密度関数）をベイズの定理より，

$$\begin{aligned}&\pi(\alpha(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})\\&\quad\propto \mathcal{L}(\mathbf{y}'(m)|\alpha(m)) \cdot \pi(\alpha(m)|\alpha(m-1), \mathbf{\Sigma}_u)\end{aligned} \tag{48}$$

とし，式 (48) から乱数を抽出することで条件付き事後確率密度関数を算出することができる．このとき，$\alpha(m)$ の条件付き事後分布を算出するためには，式 (43) の関係より $\alpha(m-1)$ が必要となる．これは $m = 1, \cdots, M$ について同様であるために，具体的には $\alpha(m-1)$ を既知として $m = 1$ から順に $m = M$ まで $\alpha(m)$ をサンプリングしていくことになる．この方法はシングルムーブサンプラーと呼ばれる[19]．一方で，本研究で取り扱うような多変量時系列にシングルムーブサンプラーを適用した場合，非常に多くのサンプリング数が必要となることが指摘されている[34]．これは，上述のように $\alpha(m)$ が $\alpha(m-1)$ に関してマルコフ性を有しているために m が大きくなるに従い影響を及ぼす未知パラメータの数が急速に増加することに起因する．

この問題への解決策として，de Jong and Shephard[35]，および Durbin and Koopman[21]は以下に述べるシミュレーション・スムーザーを提案している．シミュレーション・スムーザーは条件付き事後確率として $\pi(\alpha(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})$ の代わりに $\pi(\alpha(m)|\mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})$ を活用するための方法である．まず，$\alpha(1) = 0$，$\mathbf{P}(1) = \mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ としたときの $m = 1, \cdots, M$ に対するフィルタリングの結果として，

$$\mathbf{e}(m) = \mathbf{y}'(m) - \mathbf{Z}(m)\alpha(m) \tag{49a}$$

$$\mathbf{D}(m) = \mathbf{Z}(m)\mathbf{P}(m)\mathbf{Z}^T(m) \tag{49b}$$

$$\mathbf{L}(m) = \mathbf{P}(m)\mathbf{Z}^T(m)\mathbf{D}^{-1}(m) \tag{49c}$$

$$\alpha(m+1) = \alpha(m) + \mathbf{L}(m)\mathbf{e}(m) \tag{49d}$$

$$\mathbf{P}(m+1) = \mathbf{P}(m)(\mathbf{I} - \mathbf{L}(m)\mathbf{Z}(m)) + \mathbf{\Sigma}_u \tag{49e}$$

を得る．つぎに，この結果を利用し，$\mathbf{R}(M) = 0$，$\mathbf{r}(M) = 0$ としたときの $m = M-1, \cdots, 1$ のスムージングの結果として，

$$\mathbf{J}(m) = \mathbf{\Sigma}_u - \mathbf{\Sigma}_u\mathbf{R}(m)\mathbf{\Sigma}_u^T \tag{50a}$$

$$\mathbf{c}(m) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{J}(m)) \tag{50b}$$

$$\mathbf{V}(m) = \mathbf{\Sigma}_u\mathbf{R}(m)(\mathbf{I} - \mathbf{L}(m)\mathbf{Z}(m)) \tag{50c}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(m-1) &= \mathbf{Z}^T(m)\mathbf{D}^{-1}(m)\mathbf{e}(m)\\&\quad+(\mathbf{I} - \mathbf{L}(m)\mathbf{Z}(m))\mathbf{r}(m)\\&\quad-\mathbf{V}^T(m)\mathbf{J}^{-1}(m)\mathbf{c}(m)\end{aligned} \tag{50d}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(m-1) &= \mathbf{Z}^T(m)\mathbf{D}^{-1}(m)\mathbf{Z}(m)\\&\quad+(\mathbf{I} - \mathbf{L}(m)\mathbf{Z}(m))^2\mathbf{R}(m)\\&\quad-\mathbf{V}^T(m)\mathbf{J}^{-1}(m)\mathbf{V}(m)\end{aligned} \tag{50e}$$

を得ることができる．これにより，式 (28) で離散時間 $m = 1, \cdots, M$ を通じて一様な確率変数として定義されたランダムウォークの歩幅 $\mathbf{u}$ に対して，各離散時点 m での実現値 $\eta(m)$ をそれぞれ独立に考えることが可能となる．このとき，未知パラメータベクトル $\alpha(m)$ に関する他のすべてのパラメータの条件付き事後確率密度関数（全条件付き事後確率密度関数）は

$$\begin{aligned}&\pi(\alpha(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})\\&\quad= \pi(\alpha(m-1) + \eta(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})\\&\quad= \pi(\eta(m)|\mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi}) + \alpha(m-1)\end{aligned} \tag{51}$$

と変換できる．なお，

$$\eta(m) = \mathbf{\Sigma}_u\mathbf{r}(m) + \mathbf{c}(m) \tag{52}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}&\pi(\alpha(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})\\&\quad\propto \mathcal{N}(\alpha(m)|\alpha(m-1) + \mathbf{\Sigma}_u\mathbf{r}(m), \mathbf{J}(m))\end{aligned} \tag{53}$$

として条件付き事後確率密度関数を導出できる．

つぎに，$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ に関する全条件付き事後確率密度関数は同じくベイズの定理より，

$$\begin{aligned}&\pi(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon|\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Sigma}_u, \mathbf{\Xi})\\&\quad\propto \mathcal{L}(\mathbf{y}'(m)|\mathbf{\Sigma}_\varepsilon) \cdot \pi(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon)\\&\quad\propto |\mathbf{\Sigma}_\varepsilon|^{\frac{\nu_{\varepsilon 1}-N-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1})}{2}\right\}^{-1}\\&\quad\propto \mathcal{IW}(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon|\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 1}, \nu_{\varepsilon 1}, N)\end{aligned} \tag{54}$$

と導出される．なお，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 1} &= \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 0} +\\&\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{y}'(m) - \mathbf{Z}(m)\alpha(m))(\mathbf{y}'(m) - \mathbf{Z}(m)\alpha(m))^T\end{aligned} \tag{55a}$$

$$\nu_{\varepsilon 1} = M + \nu_{\varepsilon 0} \tag{55b}$$

である．$\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ の全条件付き事後確率密度関数（式 (54)）は事前確率密度関数と同様に逆ウィシャート分布となる．最後に，$\mathbf{\Sigma}_u$ に関する全条件付き事後確率密度関数を以下に導出する．

$$\begin{aligned}&\pi(\mathbf{\Sigma}_u|\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon, \mathbf{\Xi})\\&\quad\propto \mathcal{L}(\mathbf{\Lambda}(m)|\mathbf{\Sigma}_u) \cdot \pi(\mathbf{\Sigma}_u)\end{aligned}$$

$$\propto |\mathbf{\Sigma}_u|^{\frac{\nu_{u1}-N-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Sigma}_{u1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_u^{-1})}{2}\right\}^{-1}$$
$$\propto \mathcal{IW}(\mathbf{\Sigma}_u|\mathbf{\Sigma}_{u1}, \nu_{u1}, N) \quad (56)$$

なお,

$$\mathbf{\Sigma}_{u1} = \mathbf{\Sigma}_{u0} + \sum_{m=1}^{M}(\alpha(m) - \alpha(m-1))(\alpha(m) - \alpha(m-1))^T \quad (57a)$$
$$\nu_{u1} = M + \nu_{u0} \quad (57b)$$

である.

(4) ギブスサンプリング

式 (39) の同時事後確率密度関数は式 (53), 式 (54), 式 (56) の各条件付き事後確率密度関数を用いたギブスサンプリングにより数値的に算出することが可能である.具体的なギブスサンプリングの手順を以下にまとめる.

ステップ 1 事前分布のパラメータ値 $\alpha(0)$, $\mathbf{\Sigma}_{u0}$, ν_{u0}, $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 0}$, $\nu_{\varepsilon 0}$ を設定する.事前分布のパラメータ値の影響は観測時系列が比較的長い場合には極めて限定的となる.また, $\alpha(0)$ や $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon 0}$, $\nu_{\varepsilon 0}$ は観測時系列の最初の数パーセントを利用して VAR モデルにより推計した値を用いることで, その影響をさらに小さくすることができる.

ステップ 2-1 サンプリング回数 s の未知パラメータ集合 θ の部分集合 $\mathbf{\Lambda}^{(s)}$ を次のように発生させる.
$\alpha^{(s)}(1)$ を $\pi(\alpha(1)|\mathbf{\Lambda}_{-1}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi})$ からランダムサンプリングする.
$\alpha^{(s)}(2)$ を $\pi(\alpha(2)|\mathbf{\Lambda}_{-2}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi})$ からランダムサンプリングする.
$\cdots$
$\alpha^{(s)}(M)$ を $\pi(\alpha(M)|\mathbf{\Lambda}_{-M}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-2 サンプリング回数 s の未知パラメータの部分集合 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)}$ を $\pi(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}|\mathbf{\Lambda}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-3 サンプリング回数 s の未知パラメータの部分集合 $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{u}}^{(s)}$ を $\pi(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{u}}|\mathbf{\Lambda}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)}, \mathbf{\Xi})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 3 十分大きな $\underline{s}$ に対して $s > \underline{s}$ ならば $\theta^{(s)} = (\mathbf{\Lambda}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s)})$ を記録する.

ステップ 4 $s = \bar{s}$ ならば計算を終了する. $s < \bar{s}$ ならば $s = s+1$ とし**ステップ 2** へ戻る.

以上のギブスサンプリングにおいて, 推移核を

$$\varnothing(\theta(s-1), \theta(s)|\mathbf{\Xi}) = \prod_{m=1}^{M} \pi(\alpha^{(s)}(m)|\mathbf{\Lambda}_{-m}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s-1)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi}) \cdot\pi(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)}|\mathbf{\Lambda}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_u^{(s-1)}, \mathbf{\Xi})\pi(\mathbf{\Sigma}_u^s|\mathbf{\Lambda}^{(s)}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)}, \mathbf{\Xi}) \quad (58)$$

と定義する.このとき, $\theta(s)$ $(s = 0, 1, \cdots)$ は推移核 $\varnothing(\theta(s-1), \theta(s)|\mathbf{\Xi})$ を持つマルコフ連鎖を形成する.さらに, このマルコフ連鎖の定常状態を $\pi(\theta|\mathbf{\Xi})$ と表す.十分大きな $\underline{s}$ に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば, ギブスサンプリングによる $\theta(s = \underline{s}+1, \underline{s}+2, \cdots, \bar{s})$ のサンプリングは式 (39) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\mathbf{\Xi})$ からのサンプリングと等しくなる.したがって, ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\theta(s = \underline{s}+1, \underline{s}+2, \cdots, \bar{s})$ を用いて, パラメータ集合 $\theta = (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}, \mathbf{\Sigma}_u)$ に関する同時事後確率密度関数の統計量を計算することも可能となる.

(5) 事後分布に関する統計量

ギブスサンプリングによって得られた標本に基づいて, パラメータ集合 $\theta = (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}, \mathbf{\Sigma}_u)$ に関する統計的性質を分析することで推計値としての評価が可能となる.いま, MCMC 法により得られた標本を,

$$\theta_v(s) = vec(\theta^{(s)}) = [\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}, \cdots, \theta_{K_\theta}^{(s)}]^T = [vec(\mathbf{\Lambda}^{(s)})^T, vec(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}^{(s)})^T, vec(\mathbf{\Sigma}_u^{(s)})^T]^T \quad (59)$$
$$(s = 1, \cdots, \bar{s})$$

と表すこととする.なお, $K_\theta = (2+pM)N^2 + MN$ であるとともに, $vec(\mathbf{A})$ は $M \times N$ 行列 $\mathbf{A}$ を $MN \times 1$ ベクトルへと変換するベクトル化操作を表す.このうち, 最初の $\underline{s}$ 個を事後分布への収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する.その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{s}+1, \cdots, \bar{s})$ と定義する.このとき, パラメータ θ_v の同時確率分布関数 $G(\theta_v)$ は

$$G(\theta_v) = \frac{\#(\theta_v^{(s)} \leq \theta_v, s \in \mathcal{M})}{\bar{s} - \underline{s}} \quad (60)$$

と表すことができる.ただし, $\#(\theta_v^{(s)} \leq \theta_v, s \in \mathcal{M})$ は論理式 $\theta_v^{(s)} \leq \theta_v, s \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である.また, パラメータ θ_v の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{\theta_v}$, 分散共分散行列 $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\theta_v}$ は, それぞれ

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\theta_v} = (\hat{\xi}_{\theta_1}, \cdots, \tilde{\xi}_{\theta_{K_\theta}})^T = \left(\sum_{s=\underline{s}+1}^{\bar{s}} \frac{\theta_1^{(s)}}{\bar{s}-\underline{s}}, \cdots, \sum_{s=\underline{s}+1}^{\bar{s}} \frac{\theta_{K_\theta}^{(s)}}{\bar{s}-\underline{s}}\right)^T \quad (61a)$$

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\theta_v} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\theta_1}^2 & \cdots & \hat{\sigma}_{\theta_1\theta_{K_\theta}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{\theta_{K_\theta}\theta_1} & \cdots & \hat{\sigma}_{\theta_{K_\theta}}^2 \end{pmatrix} \quad (61b)$$

と表される.ただし,

$$\hat{\sigma}^2(\theta_{k_\theta}) = \sum_{s=\underline{s}+1}^{\bar{s}} \frac{\{\theta_{k_\theta}^{(s)} - \hat{\xi}(\theta_{k_\theta})\}^2}{\bar{s}-\underline{s}} \quad (62a)$$

$$\hat{\sigma}(\theta_{k_\theta}\theta_{l_\theta}) = \sum_{s=\underline{s}+1}^{\overline{s}} \frac{\{\theta_{k_\theta}^{(s)}-\tilde{\xi}(\theta_{k_\theta})\}\{\theta_{l_\theta}^{(s)}-\tilde{\xi}(\theta_{l_\theta})\}}{\overline{s}-\underline{s}} \quad (62b)$$

である．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ θ_v の信用区間を定義できる．$100(1-2\kappa)$% 信用区間は，標本順序統計量 $(\underline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa}, \overline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa})$ $(k_\theta = 1, \cdots, K_\theta)$

$$\underline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa} = \arg\max_{\theta_{k_\theta}^{*}} \left\{ \frac{\#(\theta_{k_\theta}^{(s)} \le \theta_{k_\theta}^{*}, s \in \mathcal{M})}{\overline{s}-\underline{s}} \le \kappa \right\} \quad (63a)$$

$$\overline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa} = \arg\min_{\theta_{k_\theta}^{**}} \left\{ \frac{\#(\theta_{k_\theta}^{(s)} \ge \theta_{k_\theta}^{**}, s \in \mathcal{M})}{\overline{s}-\underline{s}} \le \kappa \right\} \quad (63b)$$

を用いて $\underline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa} < \theta_{k_\theta} < \overline{\theta}_{k_\theta}^{\kappa}$ と定義できる．

MCMC 法では，初期パラメータ値 $\theta_v(0)$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない．ギブスサンプリングで発生させた $\overline{s}$ 個のサンプルのうち，最初の $\underline{s}$ 個の標本 $\theta_v^{(0)}$ $(s = 1, \cdots, \underline{s})$ を事後分布に収束する過程（バーンイン）からのサンプリングと考える．その上で，第 $\underline{s}+1$ 回以降の標本をとりあげる．$\underline{s}+1$ 以降の標本が，不変分布である事後分布からの標本であるかどうかを Geweke の方法[36]を用いて仮説検定を試みる．いま，パラメータのギブス標本 $\theta_v^{(s)}$ $(s = \underline{s}+1, \cdots, \overline{s})$ の中から，最初の s_1 個と最後の s_2 個のデータをとりあげる．Geweke は，$s_1 = 0.1(\overline{s}-\underline{s}), s_2 = 0.5(\overline{s}-\underline{s})$ を推奨している[36]．このとき，パラメータ θ_{k_θ} の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は，

$$Z_{\theta_{k_\theta}} = \frac{{}_1\bar{\theta}_{k_\theta} - {}_2\bar{\theta}_{k_\theta}}{\sqrt{\nu_1^2(\theta_{k_\theta}) + \nu_2^2(\theta_{k_\theta})}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (64)$$

$${}_1\bar{\theta}_{k_\theta} = \frac{\sum_{k=\underline{s}+1}^{\underline{s}+s_1} \theta_{k_\theta}^{(k)}}{s_1} \quad {}_2\bar{\theta}_{k_\theta} = \frac{\sum_{k=\overline{s}-s_2+1}^{\overline{s}} \theta_{k_\theta}^{(k)}}{s_2}$$

$$\nu_1^2(\theta_{k_\theta}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^1(0)}{s_1} \quad \nu_2^2(\theta_{k_\theta}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^2(0)}{s_2}$$

と定義できる．ただし，$f_{\theta_{k_\theta}}^l(x)$ $(l = 1, 2)$ はスペクトル密度関数であり，$2\pi f_{\theta_{k_\theta}}^l(0)$ の推計値は

$$2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^l(0) = {}_l\hat{\omega}_0 + 2\sum_{q_0=1}^{q} w(q_0, q)\,{}_l\hat{\omega}_m^i \quad (65)$$

$${}_1\hat{\omega}_0 = s_1^{-1} \sum_{g=\underline{s}+1}^{\underline{s}+s_1} (\theta_{k_\theta}^{(g)} - {}_1\bar{\theta}_{k_\theta})^2$$

$${}_2\hat{\omega}_0 = s_2^{-1} \sum_{g=\overline{s}-s_2+1}^{\overline{s}} (\theta_{k_\theta}^{g} - {}_2\bar{\theta}_{k_\theta})^2$$

$${}_1\hat{\omega}_m^i = s_1^{-1} \sum_{g=\underline{s}+q_0+1}^{\underline{s}+s_1} (\alpha_m^{i,g} - {}_1\bar{\theta}_{k_\theta})(\theta_{k_\theta}^{(g-q_0)} - {}_1\bar{\theta}_{k_\theta})$$

$${}_2\hat{\omega}_m^i = s_2^{-1} \sum_{g=\overline{s}-s_2+q_0+1}^{\overline{s}} (\theta_{k_\theta}^{g} - {}_2\bar{\theta}_{k_\theta})(\theta_{k_\theta}^{(g-q_0)} - {}_2\bar{\theta}_{k_\theta})$$

$$w(q_0, q) = 1 - \frac{q_0}{q+1}$$

として求まる[37),38]．q はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが，Geweke に従って 20 を採用する[36]．ここで，θ_{k_θ} の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\theta_{k_\theta}}| \le z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\theta_{k_\theta}}| > z_{\psi/2} \end{cases} \quad (66)$$

と設定する．ただし，$z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である．有意水準 ψ% で帰無仮説を仮説検定する場合，$z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi_{z_{\psi/2}}$ を満足する値として定義できる．ただし，Φ_z は標準正規分布の分布関数である．

5. 数値シミュレーション時系列への適用

(1) 数値シミュレーションの方法

見かけ上の固有振動数が変動する時系列を模擬するために，固有振動数が周期的に変化する時系列を以下の計算手順により作成する．いま，作成する時系列 $y(m)$ が，

$$y(m) = a_{1,m} y(m-1) + a_{2,m} y(m-2) + \varepsilon(m) \quad (67)$$

で定義される 2 次の時変 AR 過程に従うと仮定する．なお，$a_{j,m} (j = 1, 2)$ は時点 m における j 次の AR 係数を表すとともに，$\varepsilon(m) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ である．このとき，AR 係数を

$$a_{1,m} = (q_m + q_m^*) \quad (68a)$$

$$a_{2,m} = -q_m q_m^* \quad (68b)$$

と設定することにより，式 (15) より式 (67) の Z 変換後の伝達関数は，

$$\mathbf{H}(z, m) = \frac{\sigma_\varepsilon}{1 - \sum_{j=1}^{2} a_{j,m} z^{-j}} = \frac{\sigma_\varepsilon}{1 - (q_m + q_m^*) z^{-1} + q_m q_m^* z^{-2}} = \frac{\sigma_\varepsilon}{(1 - q_m z^{-1})(1 - q_m^* z^{-1})} \quad (69)$$

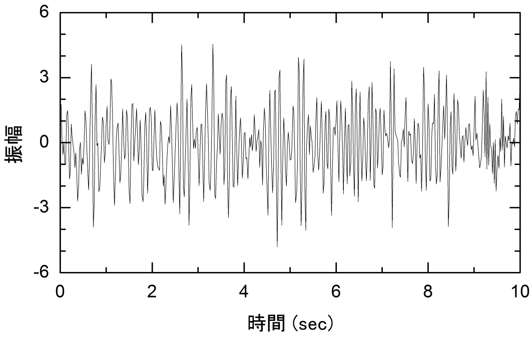
と変換できるために，q_m，q_m^* は Z 座標系における極となる．固有振動数を周期的に変化させるためには，Z 座標系における原点中心半径 l の円周上を極が周期的に移動すればよい．すなわち

$$q_m = l \cdot \exp(2\pi i \gamma(m)\Delta) \quad (70a)$$

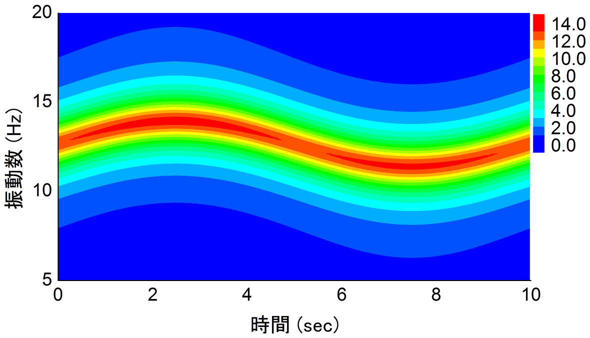
$$q_m^* = l \cdot \exp(-2\pi i \gamma(m)\Delta) \quad (70b)$$

と表現できる．さらに，

$$\gamma(m) = A_\omega \sin\left(\frac{2\pi\Delta}{\omega} m\right) + B_\omega \quad (71)$$

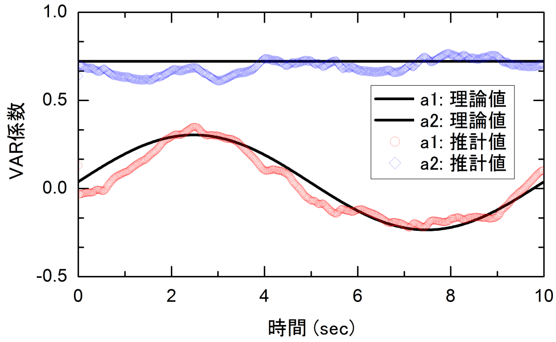


(a) 時系列応答

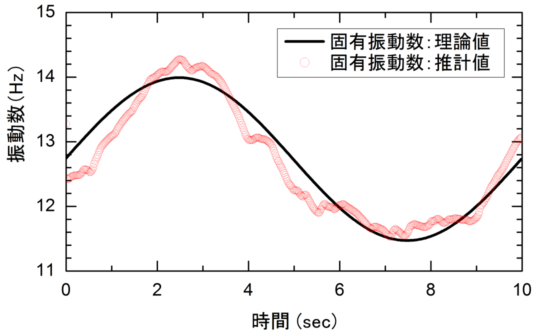


(b) 瞬間パワースペクトル応答

図–1 数値計算により作成した時系列



(a) VAR 係数の事後分布の期待値



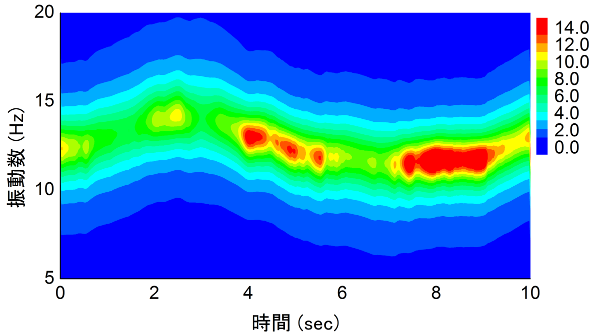
(b) 固有振動数の事後分布の期待値

図–2 TV-VAR モデルの推計結果

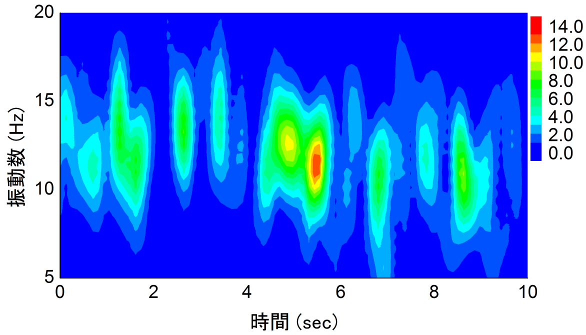
とすることにより，固有振動数が周期 ω で B_ω を中心に振幅 A_ω で変動する系からの時系列の実現値を作成できる．ここでは，Z 座標系で極が移動する円の中心半径 $l = 0.85$，離散時間間隔 $\Delta = 0.02$sec，対象時間長 $T = 6$sec，総サンプル数 $M = 300$，固有振動数の変動周期 $\omega = 6$sec，固有振動数の変動中心 $B_\omega = 12.5$Hz，固有振動数の変動振幅 $A_\omega = 2$Hz，誤差項の分散 $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ を採用した場合を例として以下の議論を進める．**図–1** には作成した時系列応答と瞬間パワースペクトル $P(f, m)$ の時系列を示している．なお，瞬間パワースペクトルは式 (35) より算出される理論値をコンター図として示しており，赤色に近づくほどパワースペクトル振幅が大きくなっている．図中に赤色で示されるパワースペクトルのピークが周期的に変動していることがわかる．なお，適用に際しては初期時点 $m = 1$ の VAR 係数 $a_{1,1}, a_{2,1}$ を有する 0.8sec 分の時系列応答を初期値の推計に用いている．また，バーンインを 10,000 回（$\underline{s} = 10,000$）とし，その後の 20,000 サンプル（$\bar{s} = 30,000$）を事後分布からの標本として記録した．

(2) TV-VAR モデルの推計結果

図–1 に示した固有振動数が時間的に変化する数値シミュレーション時系列に対して提案手法を適用した．推計結果として，VAR 係数の事後分布の期待値 $\hat{a}_1(m), \hat{a}_2(m)$ を**図–2**(a) に，VAR 係数の推計値より算



(a) 瞬間パワースペクトル応答の推計値に基づく時間周波数



(b) 短時間フーリエ変換に基づく時間周波数

図–3 TV-VAR モデルの推計結果

出した瞬間固有振動数 $\hat{\gamma}$ を**図–2**(b) にそれぞれ示す．なお，各推計値の事後分布に対する Geweke 検定統計量はいずれも絶対値で 1.96 以下であった．同図 (a) より

表–1 数値計算への適用結果

変動周期 ω[sec]	変動振幅 A_ω[Hz]	最大誤差 [%]	平均誤差 [%]
6.0	2.0	5.01	1.70
6.0	1.0	4.21	0.95
6.0	0.5	5.38	1.64
12.0	2.0	4.13	0.88
3.0	2.0	6.44	2.03

VAR 係数の事後分布の期待値 $\hat{a}_1(m), \hat{a}_2(m)$ はともに理論値 $a_1(m), a_2(m)$ とよく一致していることがわかる．また，同図 (b) に示す瞬間固有振動数についても事後分布の期待値 $\hat{\gamma}$ は理論値 γ と整合的である．瞬間固有振動数に関する推計値と理論値の差は最大で 0.635Hz であるが，これは固有振動数の平均（12.67Hz）の 5.01%となっており，推計精度としては問題ないと考えられる．**図–3** には VAR 係数の推計値より算出した瞬間スペクトル $\hat{P}(f,m)$ に基づいく時間周波数，および代表的な時間周波数分析の一つである短時間フーリエ変換に基づき算出した時間周波数をそれぞれ示す．なお，短時間フーリエ変換は 0.32sec のウインドウを 0.1sec ずつ移動させることで算出した．また，周波数分解能を 1Hz 以上とするために，ウインドウにより切り出した各波形の最後にそれぞれ 0 ベクトルを付加し 1.0sec 分のデータとしたうえでフーリエ変換を行っている．**図–3** から TV-VAR モデルの推計結果に基づき算出した瞬間パワースペクトル $\hat{P}(f,m)$ は，卓越振動数でのパワースペクトル振幅に対して理論値のように安定した値を得ることはできなかったものの，短時間フーリエ変換と比較すると，卓越振動数およびスペクトル形状を極めて整合的に評価できることがわかる．本節で適用した 2 次の TV-VAR モデルでは 0.04sec というごく短時間の周波数特性を評価する一方で，式 (28) により各時点の VAR 係数が関係付けられているために，**図–3**(a) のように時間の経過に対して比較的なめらかな周波数特性を得ることが可能である．なお，短時間フーリエ変換でも，ウインドウ幅を 1sec 程度まで大きくすることで，分析時間長の短さに起因して発生する**図–3**(b) のような時間的な周波数特性の不連続性を抑制できるが，この場合には逆に周波数特性の変化を評価することは困難となる．

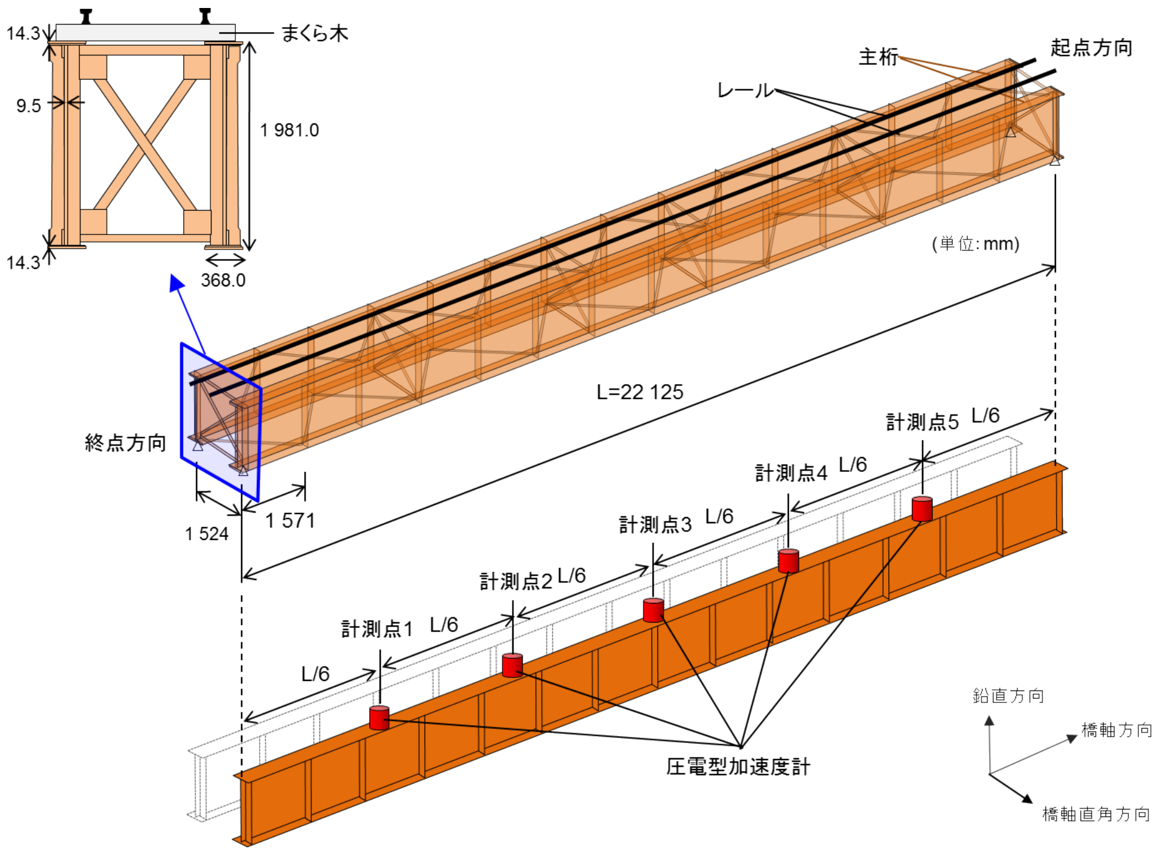
固有振動数の変動周期と振幅を変化させて，同様に推計した結果を**表–1** にまとめる．なお，表中の固有振動数の最大誤差は理論値と推計値の最大誤差を理論値の固有振動数の平均で除した値を，平均誤差は理論値と推計値の誤差の平均を理論値の固有振動数の平均で除した値をそれぞれ表す．いずれの場合でも最大誤差は 7%以下，平均誤差は 3%以下となっており，変動周期，変動振幅によらず提案手法により固有振動数が変動する時系列に対してその変動を精度よく評価できることが確認できる．

6. 実橋梁への適用

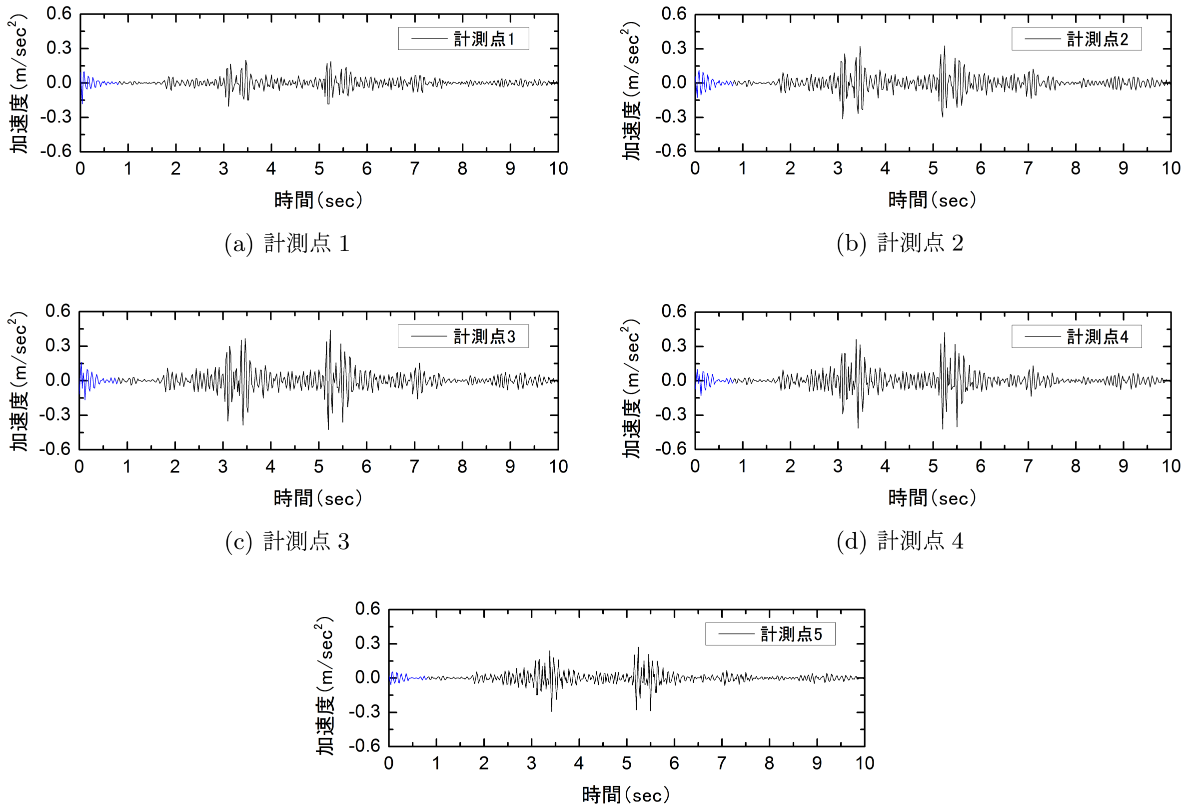
(1) 適用データ

列車質量の付加に伴う橋梁の固有振動数の見かけ上の低下量を実証的に明らかにするために，列車走行時の実橋梁で多点同時計測した加速度応答に対して，提案手法を適用する．対象とする橋梁は**図–4** に示す支間長 22.25m の 2 主 I 桁鋼鉄道橋である．構造形式は標準設計（達第 540 号）に従っている．床版が設置されておらず，I 桁上フランジ上に直接まくら木が設置してあるために，橋梁質量（27.8t）に対する列車質量（33.8t）の比率は 121.6%と非常に大きくなっている．また当該橋梁には起点側から 11m 付近（支間中央付近）にレールジョイントが存在する．なお，本研究で対象とした橋梁は，著者等による既往研究により橋梁単独の固有振動数が明らかにされている[39)]．本研究では文献[39)]を参考に橋梁の鉛直 1 次曲げモード（10.1Hz）に焦点を絞り，これ以降の議論を進めることとする．なお，対象とする橋梁の振動特性に関する詳細については参考文献[39)]を参照されたい．

図–4 には計測点配置も示している．片側主桁の上フランジ上部に設置した 5 台の圧電型加速度計で計測された応答は増幅器，AD 変換器を介して 2kHz のサンプリングレートでノート PC に収録される．なお，5 台の加速度応答の時刻は同期されている．以上の計測システムにより列車走行時の鉛直方向の加速度応答を計測した．例として，1 両編成の列車が 63km/h で通過した際の 5 つの計測点の加速度応答を**図–5** に示す．なお，**図–5** は 50Hz のローパスフィルタ処理後の加速度応答（自由度 $N = 5$，離散時間間隔 $\Delta = 0.02$sec，対象時間長 $T = 10.0$sec，総サンプル数 $M = 500$）である．**図–5** より列車車軸の通過に伴う振幅の増大を見てとることができる．具体的にはレールジョイントが存在する支間中央付近を列車が通過するときに，列車から橋梁に衝撃的な荷重が与えられるために橋梁の加速度応答振幅が最大となる．この様子が 3.2sec 付近と 5.4sec 付近で確認できることから，それぞれの時点で列車の前後の車軸が橋梁中央付近を通過しているものと推察できる．計測点により振幅が多少異なるものの，いずれも同様の傾向を示している．同図に示す加速度応答に対して，本研究では 2 次の TV-VAR モデル（$p = 2$）を適用することとした．推計に際しては列車が進入する前の加速度応答 0.8sec 分（図中の青色）を未知パラメータの初期値の学習用に使用した．また，バーンインを 10,000 回（$\underline{s} = 10,000$）とし，その後の 20,000 サンプル（$\bar{s} = 30,000$）を事後分布からの標本として記録した．

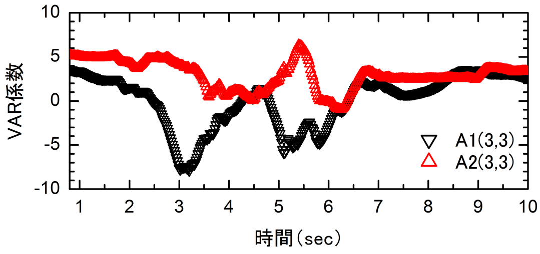


図–4 対象橋梁の諸元とセンサー配置

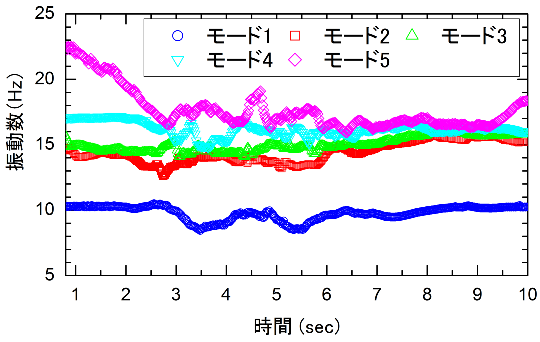


(a) 計測点 1
(b) 計測点 2
(c) 計測点 3
(d) 計測点 4
(e) 計測点 5

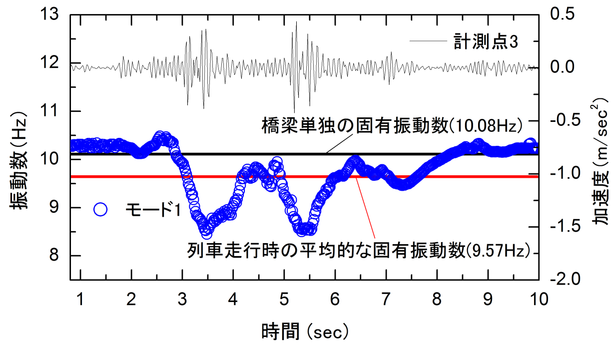
図–5 列車走行時の橋梁加速度応答（50Hz ローパスフィルタ処理後）



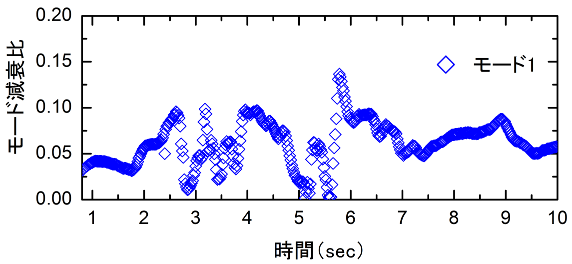
図–6 VAR 係数の事後分布の期待値



図–7 瞬間固有振動数の推計値



図–8 瞬間固有振動数の変動

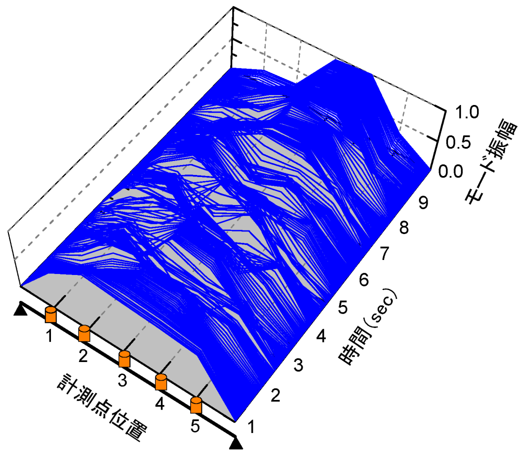


図–9 瞬間モード減衰比の推計値

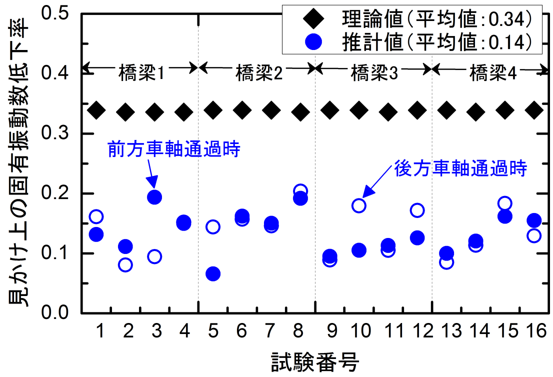
(2) TV-VAR モデルの推計結果

VAR 係数行列の推計結果の例として，AR 係数 $\hat{\mathbf{A}}_{1,m}(3,3), \hat{\mathbf{A}}_{2,m}(3,3)$ の事後分布の期待値を**図–6** に示す．なお，推計した全てのパラメータに関して Geweke 検定統計量は絶対値で 1.96 を下回っていた．**図–6** より列車の通過の影響が最も大きいと考えられる各車軸の橋梁中央通過時点（3.2sec，5.4sec）付近で VAR 係数が大きく変動していることが確認できる．変動幅は AR 係数により異なるが，同じような傾向はほとんどの AR 係数で確認された．つぎに，VAR 係数行列の事後分布の期待値に基づいて式 (32) より算出した瞬間固有振動数の推計値を**図–7** に示す．なお，固有モードは $N \times p$ 個の共役な固有値より算出されるために，5 つの振動モードについて瞬間固有振動数がそれぞれ推計される．文献[39]より 10Hz 付近のモード 1 は鉛直たわみモードである．15Hz 付近は水平 2 次たわみと鉛直 1 次たわみの連成モードであるが，モード 3 が主たるピークを，それ以外のモードが裾野の形状をそれぞれ表している．ここでも 2 次の TV-VAR モデルを推計しているために，各瞬間固有振動数は 0.04 秒間という非常に短時間の固有振動数を表している．一方で式 (28) により各時点の VAR 係数行列は 0.02sec 前の VAR 係数行列に依存して確率的に変動するために，特にモード 1 で緩やかな変動を有した瞬間固有振動数が推計されている．このモード 1 を取り出し，**図–8** に計測点 3 の加速度応答を合わせて示す．モード 1 の瞬間固有振動数は車軸が橋梁中央を通過する 3.2sec と 5.4sec 付近で見かけ上大きく低下していることが確認できる．また，列車通過時以外では多少のばらつきは存在するものの，同図にともに記載した橋梁単独の固有振動数 10.08Hz[39]に近い約 10.20Hz となっている．固有振動数が見かけ上大きく低下する 2 つの時点の最小値はそれぞれ 8.45Hz と 8.50Hz となっており，橋梁単独の固有振動数 10.08Hz と比較していずれも約 16%低下していた．また，同図には同様の時系列波形を対象に（定常性を仮定して）VAR モデルにより同定した橋梁の固有振動数を列車走行時の平均的な固有振動数として赤線（9.57Hz）で示している[39]．固有振動数が見かけ上大きく低下する 2 つの時点の瞬間固有振動数はいずれも列車走行時の平均的な固有振動数 9.57Hz を下回っており，定常性を仮定した一般的な同定手法では列車走行時の局所的な固有振動数の低下を精度良く評価できないことがわかる．なお，TV-VAR モデルの次数を変化させた場合でも固有振動数の見かけ上の低下量がほとんど変化しないことを，4 次（$p = 4$），6 次（$p = 6$）の TV-VAR モデルを推計することで確認している．固有振動数の見かけ上の低下量と理論値との関係については次節 **6.(3)** で詳しく説明する．

3.(2) で述べたように，TV-VAR モデルを推計することによって橋梁の瞬間固有振動数以外にも橋梁の振動特性の時系列を得ることができる．一例として，モード 1 の瞬間モード減衰比を**図–9** に示す．瞬間固有振動数と比較して瞬間モード減衰比の変動は非常に大きくなっている．また，列車通過前後のモード減衰比が 5%前後



図–10 瞬間振動モード形の推計値



図–11 固有振動数の見かけ上の低下量

と一般的な鋼橋よりも高くなっている．瞬間モード減衰比は振幅増大時に低下し，その直後に増加する傾向にあることから加速度応答の振幅が大きな影響を及ぼしていると考えられる．このようなパラメータの変動は共通のパラメータ $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ で表現されているために，列車通過前後のモード減衰比についてもその影響により大きな値となっていると推測される．列車走行時のモード減衰比は共振発生時の振幅に大きく影響する重要なパラメータであり，より精緻な評価は今後の課題としたい．また，**図–10** には同じくモード 1 の瞬間振動モード形を示す．なお，モード振幅はそれぞれの瞬間モード形で最大値が 1 となるように基準化するとともに，支承部のモード振幅は 0 と仮定している．**図–10** より，瞬間固有振動数が橋梁単独の固有振動数と近い 1〜2sec，7〜10sec で瞬間振動モード形が 1 次曲げモードの理論モード形（サイン半波）に近い値となっているが，列車が橋梁上に位置する 2.5〜6.5sec においては理論モード形から大きく逸脱した瞬間振動モード形が存在することが確認できる．また，逸脱している瞬間振動モード形も列車走行中で一定ではなく時間によりその形状が異なっている．今後，このように算出した瞬間振動モード形の時系列を初期値として利用した逆解析により，走行列車の質量や拘束効果が橋梁全体系に及ぼす影響について実証的に検討していくことも有益であると考えられる．なお，これについては本研究の範疇を大きく超えるために別の機会に発表することとしたい．

(3) 固有振動数の見かけ上の低下量

本節では列車走行時の橋梁の固有振動数の見かけ上の低下量について検討する．**6.(2)** と同様の分析を同じ構造形式を有する 4 橋で実施し，車軸の通過に伴う固有振動数の見かけ上の低下量を算出した．列車走行試験は各橋梁につき 4 回程度実施しており，走行した列車の速度，型式を把握している．列車はすべて 1 両編成であり 1 回の試験により前後の車軸が橋梁中央を通過する 2 時点で固有振動数が見かけ上低下した．それぞれの時点で固有振動数の最小値を抽出し，インパルスハンマー試験より各橋梁で同定した橋梁単独の固有振動数との差を求めて，それを橋梁単独の固有振動数で除した値を低下率と定義した．結果を**図–11** に示す．なお，同図中には列車質量を付加質量として加えた固有値解析により簡易に算出した理論的な低下率を併せて示している．固有値解析モデルと理論値の算出については**付録 I** を参照されたい．

図–11 には各橋梁ごとに，前方車軸通過時と後方車軸通過時の低下率をそれぞれ示しているが，一貫した傾向を読み取ることはできない．低下率は若干のばらつきを有しているものの，前方車軸通過時と後方車軸通過時の低下率の平均はいずれも 14%であった．また，本研究で計測した列車走行速度の範囲（43〜59km/h）では列車走行速度との関係性は見られなかった．一方で，固有値解析により算出した見かけ上の固有振動数低下率は推計値と比較して 2.50 倍と非常に大きくなっており，列車走行時の見かけ上の固有振動数の低下現象が単純な質量付加のみでは説明できないことがわかる．

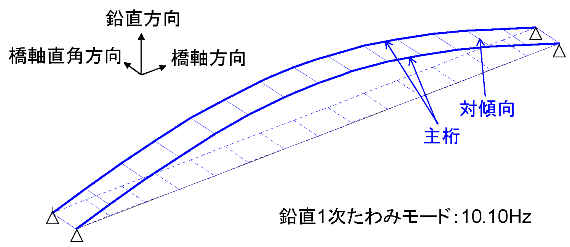
列車質量以外の要因としては列車の振動特性の影響，車輪とレールとの接触力の変動，過渡応答の影響などがあげられる．すなわち，1 次たわみモードでは橋梁の中央を車輪が通過した際に低下率が最大となるが，このとき，車両振動などに伴い軸重が変動するような場合には低下率が小さく評価される．さらに，橋梁に列車質量が付加された状態を考えたとしても，実際には橋梁応答が橋梁単体の応答から橋梁と列車質量を含めた応答に変化するまでの間にはある程度の時間にわたり過渡応答が存在すると考えられる．列車が常に移動しており低下率が最大となる橋梁中央を通過する時間がごく短いものであることを鑑みれば，橋梁の応答が橋梁と列車質量を含めたものに変化する前の過渡応答の状態で，より低下率の低い状態に列車が移動してい

る可能性を指摘することができる．このような過渡応答の影響に関しては，系の変化に対する応答の変化の「遅れ」について検討する必要あるが，これまで蓄積されてきた構造系の変化に関する知見の範疇を超えるものであり，今後の課題としたい．

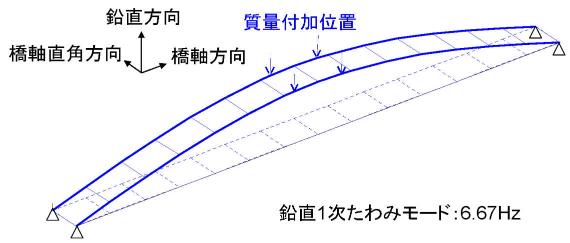
このような理論値との差異，およびその要因について今後の課題は存在するものの，TV-VAR モデルにより本研究で明らかにした列車走行時の固有振動数の見かけ上の低下率（平均で 14%程度，最大で 20%程度）は，列車質量の影響が特に大きいと考えられる橋梁における実測値として，一つのベンチマークになると考えられる．

7. おわりに

本研究では実測応答に基づく固有振動数の見かけ上の変化を抽出することを目的とし，時間領域における同定手法の 1 つである多変量自己回帰モデル（Vector Autoregressive Model : VAR）に時間的変化（Time-varying : TV）を許容した TV-VAR モデルを導出し，階層ベイズ推計により未知パラメータを推計する手法を構築した．その上で，はじめに提案手法を数値シミュレーション時系列に適用し，固有振動数の変化を精度よく評価することが可能であることを確認した．つぎに，実際の列車走行時の橋梁加速度応答に TV-VAR モデルを適用し，列車走行時の橋梁の固有振動数が実際に見かけ上低下していることを確認した．列車走行時の橋梁の見かけ上の固有振動数の低下率は本研究の対象橋梁では平均で 14%，最大で 20%であった．一方で，本手法により瞬間的な固有振動数のみならずモード減衰比や振動モード形についても実測応答から推計できることを示した．列車走行時の振動モード形の時間的変化と列車荷重の関係，見かけ上の固有振動数低下率における理論値と推計値の相違については，動的相互作用を考慮した FEM 解析を併用することで，構造系の変化に対する応答の変化の「遅れ」に着目し，その発生メカニズムを詳細に検討していく予定である．これと同時に列車応答や振動特性と橋梁の振動特性の関係を明らかにするために，橋梁のみならず列車の加速度応答計測を実施し，橋梁・列車の同期加速度応答に対して TV-VAR モデルを適用するといった実証的アプローチも有効であると考えられる．一方で，本研究では瞬間固有振動数に焦点を絞って議論を行ったために，瞬間モード減衰比に見られた振幅に依存した（振幅増大時に減衰比が 0 近くなるような）推計値の偏りについて詳細な分析を実施していない．振幅に依存したバイアスは誤差項の分散共分散行列に課された定常性の制約に起因して生じたものと考えられる．これに対して筆者らは現在，分散共分散行列が時間経過に伴って確率的に変動する Heteroscedastic-TV-VAR モデルを構築し，その有効性について検討している．最後に，本研究の成果により，既存の載荷時固有振動数の設定および剛性の下限値[5),6)]が基本的に安全側である可能性が示唆された．今後，より実現象に即した載荷時剛性の評価式や剛性の下限値を提案するために，高速走行時や共振発生時を対象とした固有振動数の見かけ上の低下率，および速度や列車種別との関係を明らかにすることが不可欠である．



(a) 橋梁単独モデル



(b) 列車質量付加した橋梁モデル

図–12 固有値解析モデル

謝辞：本研究の一部は日本学術振興会「特別研究員奨励費」によって実施された．ここに記して感謝の意を表する．

付録 I 固有値解析

6.(3) で理論値を算出するために，本研究では**図–12** に示す有限要素モデルの固有値解析[40)]を利用した．なお，橋梁単独の有限要素モデルは桁のみを単純梁（橋軸方向に 15 分割）としてモデル化し，対傾向については剛体要素を用いた．有限要素モデルの諸元は**図–4** を，橋梁質量は設計時に算出された 27.82t を用いた．本モデルの固有値解析結果は 10.10Hz であり，対象とした 4 橋でインパルスハンマー試験により同定した固有振動数（橋梁 1 : 10.10Hz，橋梁 2 : 10.08Hz，橋梁 3 : 10.07Hz，橋梁 4 : 10.18Hz）と精度よく一致することを確認している．この有限要素モデルの径間中央を中心として橋軸方向に 1.05m ずつの地点に質量を付加することで列

車質量を表現した（**図–12**(b)）．質量付加の位置（間隔 2.1m）と大きさ（8.47t）は通過した列車の諸元に基づいている．なお，乗客の有無は考慮していない．列車質量を付加した有限要素モデルの固有値解析結果は 6.67Hz であり，橋梁単独の場合の結果から理論的な低減率 0.336 を算出している．

参考文献

1) 松浦章夫：高速鉄道における橋桁の動的挙動に関する研究，土木学会論文集，Vol.256，pp.35-47，1976.
2) 原恒夫，吉岡修，神田仁，舟橋秀麿，根岸裕，藤野陽三，吉田一博：新幹線走行に伴う沿線地盤振動低減のための高架橋補強工の開発，土木学会論文集，No.766/I-68，pp.322-338，2004.
3) Li, J. and Su, M.: The Resonant Vibration for a Simply Supported Girder Bridge under High-Speed Train, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.224, pp.897-915, 1999.
4) Ju, S. H. and Lin, H. T.: Resonance Characteristics of High-Speed Trains Passing Simply Supported Bridge, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.267, pp.1127-1141, 2003.
5) 鉄道総合技術研究所編：鉄道構造物等設計標準・同解説，コンクリート構造物，丸善，2007.
6) 鉄道総合技術研究所編：鉄道構造物等設計標準・同解説，鋼・合成構造物，丸善，2009.
7) 曽我部正道，松本信之，藤野陽三，涌井一，金森真，宮本雅章：共振領域におけるコンクリート鉄道橋の動的設計法に関する研究，土木学会論文集，No.724/I-62，pp.82-102，2003.
8) 貝戸清之，松岡弘大，渡辺勉，曽我部正道，藤野陽三：走行列車荷重下における鉄道橋桁の動的応答の特性とその利用，土木学会論文集 F，Vol.66，No.3，pp.382-401，2010.
9) 松岡弘大，貝戸清之，渡辺勉，曽我部正道：走行列車荷重を利用した RC 鉄道高架橋の部材振動の同定と動的挙動の把握，土木学会論文集 A1（構造・地震工学），Vol.67，No.3，pp.545-564，2011.
10) 長松明男：モード解析入門，コロナ社，2006.
11) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977.
12) 貝戸清之，阿部雅人，藤野陽三：不確実性に起因する振動特性変化の定量化とその有意性検定手法，土木学会論文集，No.682/I-56，pp.399-414，2001.
13) モード解析ハンドブック編集委員会：モード解析ハンドブック，コロナ社，2000.
14) 池原雅章，島村徹也：MATLAB マルチメディア信号処理　上，培風館，2004.
15) 北川源四郎：時系列解析入門，岩波書店，2005.
16) 尾崎統，北川源四朗：時系列解析の方法，統計科学選書，平河工業社，1998.
17) 松岡弘大，貝戸清之，曽我部正道：動的モデル選択とクラスタリングによる固有振動数の変化点検出，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.67，No.2，pp.843-854，2011.
18) 姜興起，金明哲：ベイズ統計データ解析，共立出版，2010.
19) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
20) Koop, G., Poirier, D. and Tobias, J.: *Bayesian Econometric Methods*, Cambridge University Press, 2007.
21) Durbin, J. and Koopman, S. J.: *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, 2002.
22) Xia, H. and Roeck, D. G. : System Identification of Mechanical Structures by a High-Order Multivariate Autoregressive Model, *Computers and Structures*, Vol.64, pp.341-351, 1997.
23) Huang, C. S.: Structural Identification from Ambient Vibration Measurement using the Multivariate AR Model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.241, pp.337-359, 2001.
24) 岡林隆敏，中忠資，奥松俊博：多次元 AR モデルを用いた常時微動による橋梁振動特性推定法と推定精度の検討，土木学会論文集 A，Vol.64，No.2，pp.474-487，2008.
25) Canova, F.: *Methods for Applied Macroeconomic Research*, Princeton University Press, 2002.
26) Kadiyala, K. and Karlsson, S.: Numerical Method for Estimation and Inference in Bayesian VAR models, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.12, pp.99-132, 1997.
27) Kitagawa, G. and Gersch, W.: *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer-Verlag, New York, 1997.
28) 山口類，土屋映子，樋口知之：状態空間モデルを用いた飲食店売上の要因分解，オペレーションズ・リサーチ，Vol.49，No.5，pp.52-60，2004.
29) Bishop, C. M.: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006.
30) Primiceri, G. E.: Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy, *Review of Economic Studies*, Vol.72, pp.821-852, Northwestern University, 2005.
31) Koop, G., Gonzalez, L. R. and Strachan, W. R.: On the Evolution of the Monetary Policy Transmission Mechanism, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.33, pp.997-1017, 2009.
32) Fruhwirth-Schnatter, S., Tuchler, R. and Otter, T.: Bayesian Analysis of the Heterogeneity Model, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.22, No.1, pp.2-15, 2004.
33) Rossi, P. E. and Allenby, G. M.: A Bayesian Approach to Estimating Household Parameters, *Journal of Marketing Research*, Vol.30, pp.171-182, 1998.
34) Nakajima, J.: Time-varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications, *Discussion Paper*, IMES discussion paper series, No.9, 2011.
35) de Joug, P. and Shephard, N.: The Simulation Smoother for Time Series Models, *Biometrika*, No.82, pp.339-350, 1995.
36) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
37) Chib, S.: Marginal Likelihood from Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
38) Newey, W. K. and West, K. D.: A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
39) 貝戸清之，松岡弘大：同一形式の橋梁群を対象とした列車走行時の振動特性，橋梁振動コロキウム 2011，土木学会，pp.98-105，2011.
40) 小林一行：MATLAB ハンドブック，秀和システム，2008.

(2012. 4. 23 受付)

土木学会論文集A1(構造・地震工学), Vol. 68, No. 3, 738-753, 2012.

HIERARCHICAL BAYESIAN ESTIMATION OF TIME VARYING VECTOR AUTOREGRESSIVE MODEL

Kodai MATSUOKA and Kiyoyuki KAITO

When a train runs on a bridge, the natural frequency of the bridge decreases apparently due to the effect of the mass of the train. However, there have been no researches that discussed this effect based on actual measurement data. In this study, the authors formulate a TV-VAR model in which the VAR coefficient of a vector autoregression model changes with time stochastically, in order to evaluate the decline in the apparent natural frequency of a bridge at the time of train passing, and then develop an estimation method for unknown parameters based on the hierarchical Bayesian method. By applying numerical calculation results and the actual acceleration response of the bridge at the time of train passing, it was found that (1) the proposed method can evaluate the change in natural frequency accurately, (2) apparent natural frequency decreases actually in the bridge at the time of train passing, and (3) the decrease amount is 14% on average, 20% at a maximum for the target bridge of this study.