

時系列モニタリングデータ活用のための 長期劣化進行モデリング

小林 潔司¹・貝戸 清之²・松岡 弘大³・坂井 康人⁴

¹フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 公益財団法人 鉄道総合技術研究所 構造力学研究室 (〒 185-8540 国分寺市光町 2-8-38)

E-mail: kmatsuoka@rtri.or.jp

⁴正会員 阪神高速道路株式会社 建設事業本部 (〒 590-0075 大阪市西区阿波座 1-3-15)

E-mail: yasuhito-sakai@hanshin-exp.co.jp

維持管理の効率化と定量化を目的として、センサーを用いた長期モニタリングの実用化が進められている。その一方で、得られたモニタリングデータに基づいて異常事象の検出や劣化の進行過程を抽出するための方法論は十分に整備されていない。本研究では長期モニタリングにより取得した時系列データの統計的特徴に基づく劣化予測手法を提案する。具体的には、時系列モデルの誤差項の分散の変動をトレンド付きの ARMA モデルで表現した ARMAX-GARCH 回帰モデルにより表現するとともに、推計した ARMAX-GARCH モデルを利用して詳細点検を実施する時期を予測する方法論を構築する。最後に、高架橋のジョイント部材を対象とした長期モニタリングデータへの適用を通じて、本手法の有効性を検証する。

Key Words : ARMAX-GARCH model, long-term monitoring, time series analysis, joint member

1. はじめに

現在のアセットマネジメントは、目視点検データを中心とした方法論 (Visual Inspection Data Based Asset Management) によって構築されている¹⁾。マルコフ連鎖モデルによる劣化予測^{2),3)}や、マルコフ決定モデルを援用したライフサイクル費用最小化に基づく最適補修戦略の決定^{1),4)}など、マネジメント要素技術の開発とそれを用いたライフサイクル費用分析の方法論が開発され、アセットマネジメントの実用化に大きく貢献してきた。一方で、1) 常時監視による損傷・劣化の早期検出、2) 力学的性能の定量的評価に基づく構造安全性の確保といった実務的要請の極めて高いニーズに対しては、目視点検の限界が指摘されている。これらの課題に対する解決策の1つとして、モニタリングデータに基づくアセットマネジメント (Monitoring Data Based Asset Management) の開発が必要である。

モニタリングに着目したアセットマネジメントにおいては、長期間蓄積したモニタリングデータに基づく、異常事象の早期検出、点検業務の効率化、劣化予測、診断等に関する方法論の開発が課題となっている。長期間蓄積したモニタリングデータは、目視点検で用いてきた多段階レーティングデータとは異なり、連続値の物理量で表現される場合が多い。また、観測する物理

量は気温や天候など、構造物の性能とは関係のない因子の影響を受けて変動することも多い。モニタリングデータに基づき維持管理に関する意思決定を行うためには、モニタリングデータから構造物の劣化や異常に起因した特徴を抽出可能なモデルの構築と、構築したモデルを用いた劣化予測が不可欠となる。

本研究では、長期モニタリングにより蓄積した時系列データを用いて、モニタリングデータに介在する多くの影響因子と誤差・ノイズを分離するとともに、構造物の異常や劣化と関連性の高い統計的特徴量を抽出する方法論を提案する。その際、高架橋のジョイント部材を対象として実施した長期モニタリングデータに基づく時系列モデルを用いて劣化過程を表現するとともに、劣化予測を通じて詳細点検の必要性や実施時期を予測する方法論を構築する。具体的には、劣化の進行過程を外生変数を考慮した自己回帰移動平均モデル (AutoRegressive Moving Average model with eXogenous variables model, 以下, ARMAX モデル) で表現するとともに、その誤差項の分散の変動を確定トレンド付きの GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity model) 過程で表現した ARMAX-GARCH モデルとそのベイズ推計方法を提案する。さらに、1) 実際のモニタリングデータに対する統計的特徴の分析、2) 過去からのトレンド成分に基づく、ジョ

イント部材の劣化進行の予測, 3) 劣化予測結果を用いた詳細点検時期の決定, について論ずる.

社会基盤施設の長期モニタリングにおいては, 構造物の劣化を直接観測できる場合は少なく, 多くの場合, 構造物の劣化に対応すると考えられる物理量を観測している. このことから, モニタリングで取得する物理量と構造物の劣化進展や異常を関連付けることが重要となる. そこで, 本研究では, 対象とした高速道路のジョイント部材の長期モニタリングデータと劣化進行状況との関連性について分析する. 具体的には, モニタリング開始時とその1年後に路上規制を伴うたたき・目視点検を実施し, ジョイント部材の詳細な状態を把握した. また, モニタリング中に一部のジョイント部材の取換えを実施し, 補修必要時の状態と新規供用時の状態を把握した. これらの点検情報と本研究で提案した方法論により明らかとしたモニタリングデータの統計的特徴の関連性を分析し, ジョイント部材の損傷の種類や程度を定量的に評価するモニタリングシステムの実現可能性について検討する. 以下, 2. で本研究の基本的な考え方を説明する. 3. で ARMAX-GARCH モデルについて, 4. で推計方法について述べる. 5. では高速道路のジョイント部材を対象とした長期モニタリングデータを用いて ARMAX-GARCH モデルを推計する. さらに, たたき・目視点検結果により把握した劣化の進行とモニタリングデータの統計的特徴との関係について分析する.

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 維持管理におけるモニタリング

社会基盤施設の状態を計測データにより客観的, 定量的に把握するとともに, 劣化や異常を早期に検知するために, モニタリング技術の開発が数多く試みられている. 特に, 社会基盤施設の振動に着目したモニタリングは, 物理特性との関係把握が容易なことも相まって, 計測技術と計測データの分析技術が古くから継続的に改良されてきた. 近年では, 目視点検を補完する方法として, その役割が議論されている. 例えば, 振動モニタリングについては, 2つの重要な役割を果たすことが期待されている. すなわち, 1) 1回もしくは数回の詳細な計測から構造物の安全性や性能を把握する, 2) 長期にわたる計測データに基づいて構造物の劣化や異常を検知する, ことがあげられる. 前者は比較的大規模で詳細な計測を実施するとともに, 計測データから逆解析により構造性能を推計する. 後者は長期間継続することを目的とした比較的簡素な計測を実施するとともに, 長期間蓄積した計測データの相対比較を通じて劣化や異常を検知する. 本研究では, 後者の立場

から, 構造物や部材の性能を長期間計測し, その計測情報の相対的変動から構造物の異常や性能低下(劣化)を把握する. さらに, それらの情報に基づいて構造物の安全性を確保するとともに, 構造物の状態に基づいて詳細点検や補修の決定を行うことにより維持管理業務の効率化を図るための方法論を提案する. このような目的を達成するためには, 長期的にデータを取り続けることが可能なモニタリングシステムの開発と, 取得したモニタリングデータから維持管理に関する意思決定を行う方法論の開発が重要な課題である. なお, すでに斜張橋振動や橋梁の温度変化などを対象に長期計測を目的としたモニタリングシステムの開発, および長期間のデータ蓄積を試みている先駆的研究事例が存在する^{5),6)}. 筆者らもすでに継続的な長期モニタリングの実用化を見据え, モニタリングシステムの開発と実構造物を対象とした当該システムの有効性を確認している⁷⁾. しかし, これらの研究は計測方法の開発をめざしたものであり, 計測結果のモデリングを目的とした研究ではない. 本研究では, 筆者らが獲得したジョイント部材の長期モニタリングデータ⁷⁾に基づいて, ジョイント部材の長期劣化進行過程を ARMAX-GARCH モデルを用いてモデル化するとともに, 高速道路のジョイント部材の劣化のタイプや将来時点における劣化の進行過程を予測する方法論を提案する.

(2) モニタリングデータと統計モデル

土工学分野において構造物から振動やひずみなどの物理量を長期的に計測するモニタリングシステムの開発や実構造物への適用に関する研究事例が発表されている. しかしながら, 国内では長期的に蓄積された定量的なモニタリングデータから継時的変化や異常を検出する方法論に関しては, ほとんど研究が蓄積されていないのが現状である. 一方で, 海外における長期モニタリングデータの分析手法は, 大きく構造的手法と統計的手法に分類することができる. Fritzen⁸⁾は, モニタリングデータの分析手法として提案された近年の構造的手法を総括し, 実験室など環境を整えた状況においては構造物の損傷を精度よく抽出できるとしている. さらに, Friswell and Mottershead⁹⁾は, 実環境への応用においては, 数値解析モデルをモニタリングデータに合わせて更新することが有望な手法であると指摘している. 統計的手法を用いてモニタリングデータを分析した事例として, Kiremidjian¹⁰⁾の研究が存在する. Kiremidjian はパターン認識の知見を用いて観測データ中の特殊な変動を抽出する方法を提案している. その他にもコントロールチャート^{11),12)}やクラスターリングアルゴリズム¹³⁾を利用した様々な手法について, 損傷検出の可能性が検討されている. しかしながら, 統計的

手法の有効性は、その多くが実験室など、損傷や外乱が制御された環境における分析に留まっている。これまでに提案された手法の実用的価値を評価するためには、供用下にある実構造物を対象とした検証が必要不可欠であるが、実構造物では実験室と比較して未知の外乱が数多く介在する。すなわち、未知の外乱や環境に依存した日々の変動と構造物の性能に依存した変動を分類する方法論の構築が重要な課題となる¹⁴⁾。これに対して、Chu and Durango^{15),16)}は舗装の性能を評価するために時系列モデルの状態空間情報の利用を試みている。Chu and Durango は施設の特性に依存せず適用可能なモニタリングデータの分析手法として多重回帰モデルと ARIMA-GARCH モデル、コントロールチャートを利用した方法論を提案している。しかし、ここでは多重回帰分析の推計誤差の時系列分析に ARIMA-GARCH モデルを適用しているにすぎず、多重回帰モデルと ARIMA-GARCH モデルの同時推計を試みているわけではない。したがって、モデルのパラメータ推計の効率性、一致性に問題が残されている。

ジョイント部材の長期モニタリングデータの特徴は、部材の劣化の進展により部材性能(本研究では振動特性)が変化する点にある。伝統的な時系列モデルは、モデルの誤差項が定常的な確率分布に従うことを仮定する場合が多いが、振動特性が非定常に変化する場合、この仮定は成立しない。モデルの誤差項の分散が時間的に変動することを許容した時系列モデルとして ARCH (Autoregressive conditional heteroskedasticity) モデル¹⁷⁾が提案されている。ARCH モデルは、Bollerslev¹⁸⁾により GARCH (generalized ARCH) モデルへと拡張され、誤差項の時間的変動特性をモデル化することが可能となった。近年では、計算機性能の向上と MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 法の発展^{19),20)}により、ARCH モデルは高度に非線形かつ非定常なモデルへと拡張されている²¹⁾。代表的なものとして、時系列の期待値の変動を ARMA (Autoregressive Moving Average) モデルや ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) モデルで表現するとともに、誤差項の分散の変動を ARCH モデルや GARCH モデルを用いて表現した ARMA-GARCH モデル²²⁾、外生変数に対する回帰モデルの誤差が ARMA-GARCH 過程に従う ARMA-GARCH モデルなどが提案されている²³⁾。さらに、MCMC 法により全てのパラメータを一括して推計することも可能となっている²⁴⁾。本研究で対象とする構造物の長期モニタリングにおいては、構造物の劣化といった時間的に不可逆な現象がトレンドとして含まれると考えられる。しかしながら、例えば、劣化の進展とともに、モニタリングデータのばらつきが大きくなっていくような現象は、上述の時系列モデルを用いて

も正しく評価できない。本研究では、ARMA 部分に外生変数を明示的に組み入れるとともに、GARCH 部分に時間トレンド項を導入したような ARMAX-GARCH モデルを提案することとする。ARMAX-GARCH モデルは高度に非線形性が高く、通常の最尤法を用いることができない。本研究では MCMC 手法を用いて ARMAX-GARCH モデルを同時推計するための方法論を提案する。これにより、Chu and Durango^{15),16)}が有していたモデル推計上の課題を克服することが可能になると考える。

(3) 対象構造物と要点検時期の予測

2.(2) で述べたように、本研究ではモニタリングデータの統計的特徴を ARMAX-GARCH モデルを用いて表現する。一方で、このような統計的特徴のみでは、構造物の状態に基づいた点検時期を決定できない。そこで本研究では、補修や補強、取替えが必要な状態のジョイント部材を対象にモニタリングデータを取得し、それらを ARMAX-GARCH モデルによる予測結果の閾値として利用することにより、点検が必要となる時期を予測する方法論を提案する。なお、閾値に関しては様々な観点からの設定が考えられるが、この点に関しては今後の研究課題として別の機会に発表することとしたい。

対象とした高速道路のゴム製ジョイントは劣化が進展することにより、車両通過時の「音」が変化することが経験的に知られている。そこで、本研究ではモニタリングデータの中でも車両通過時の卓越振動数に着目し、たたき・目視点検との比較により卓越振動数の時間的変化や着目すべき振動数帯を明らかにする。これにより、劣化の進行や発生を監視するために視るべきモニタリング指標を選定するが、選定されたモニタリング指標がどの程度の値になった場合に詳細な点検を要する程度まで劣化が進行しているのかは定かでない。そこで、ゴム製ジョイントの中で劣化が進行しており、対象期間中に取換えが実施されたジョイントを参照サンプルとして選定した。これにより、実際の維持管理業務で対処が必要となったジョイントの補修前後におけるモニタリングデータを獲得した。このような参照サンプルデータを用いて、詳細な点検が必要となるかを判断するための閾値について分析することが可能となる。なお、ジョイント部材によっては、部材の劣化状態が同一であっても、ジョイントが設置されている環境により、車両通過時の卓越振動数が多様に異なる可能性がある。そこで、ゴム製ジョイントの取換えが実施された複数の地点を対象として、ジョイント取換え前後におけるモニタリングデータを取得するように努めた。

一方で、ジョイント部材のアセットマネジメントの

立場からは、ARMAX-GARCH モデルを用いた時系列モデルの推計にとどまらず、詳細点検の必要性の有無や、将来における補修時期を予測することが求められる。本研究では、モニタリングと同時に目視点検を実施して、モニタリングデータの統計的特徴と劣化状態の対応関係について分析した。対象としたゴム製ジョイント部材に関しては、段差や摩耗、剥離やき裂という劣化事象が存在する。本研究では、主にゴム製ジョイント本体の劣化事象に着目することとし、ゴム製ジョイント本体と取付け部や後打ち材の段差がほとんど存在しない箇所を分析対象として選定している。ゴム製ジョイントの摩耗、剥離、き裂などは路上規制を伴うたたき・目視点検により把握することが可能である。モニタリングを開始する直前の2012年2月23日に対象箇所のたたき・目視点検を実施し、各ジョイントごとに劣化状態や箇所を把握している。そのうえで、6台の無線モニタリングシステムを2012年2月27日と3月17日に設置し、長期モニタリングデータを取得した。さらに、モニタリングを開始してから約1年となる2013年1月28日に、再度、当該箇所のたたき・目視点検を行い、前回の状態からの劣化の進行や新たな劣化の発生具合を把握した。このようにモニタリングと並行して実施したたたき・目視点検情報と ARMAX-GARCH モデルで分析したモニタリングデータの統計的特徴を比較することにより、ゴム製ジョイントの損傷の種類および進行量と、ARMAX-GARCH モデルとの対応関係について分析することが可能となる。

3. ARMAX-GARCH モデル

長期モニタリングにより得られた単変量時系列データ $y(t)$ ($t = 1, \dots, T$) を、ARMAX(p, q)-GARCH(r, s) モデルの GARCH 部分に確定トレンドを導入した以下のモデルを用いて表現する。

$$y(t) = \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\gamma}' + u(t) \quad (1a)$$

$$u(t) = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon(t) \quad (1b)$$

$$\sigma(t)^2 = a + bt + \sum_{j=1}^r \alpha_j \varepsilon(t-j)^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma(t-j)^2 \quad (1c)$$

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma(t)^2) \quad (1d)$$

$(t = 1, \dots, T)$

ただし、 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_k(t)]$ は k 次元説明変数行ベクトル、 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ は k 次元回帰係数行ベクトル、 ϕ は AR(p) 過程の係数、 θ は MA(q) 過程の係数、 α と β は GARCH(r, s) 過程の係数を表す。記号「 $'$ 」は転置操作を表す。式 (1d) は $\varepsilon(t)$ が平均 0、分散 $\sigma^2(t)$ の正規分布に従うことを意味する。また、 L はバック

シフト・オペレータであり、多項式 $\Phi(L), \Theta(L)$ は

$$\Phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j \quad (2a)$$

$$\Theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j \quad (2b)$$

と表せる。通常、時系列モデルでは、式 (1a) は、状態変数の自己回帰モデルとして表現される。本研究では、通常の状態変数に加えて、降雨や気温など環境因子の影響についても分析するために、それらの情報も外生変数 \mathbf{x} に含めることとする。式 (1a)-(1d) を用いて、モニタリングデータの変動の中で構造物の劣化特性とは異なる変動を分離する。さらに、回帰成分では表現できないモニタリングデータの変動の中でも、通過する車両種別や速度の相違などに起因するような短期的な変動については式 (1b) の ARMA 過程で表現する。これにより、構造物の劣化のような長期的かつ時間進行に対して非可逆的な変動を、時間トレンドとして評価する。さらに、誤差項 $\varepsilon(t)$ の分散 $\sigma(t)^2$ の変動過程に関しては、式 (1c) に示すような GARCH(r, s) 過程に時間トレンド項を加えてモデル化している。これにより、分散 $\sigma(t)^2$ の時間経過に伴う変動も期待値と同様に、短期的な変動を GARCH(r, s) 過程として分離したうえで、長期的な変動を時間トレンドとして評価する。なお、GARCH 過程に対しては、誤差項の分散 $\sigma(t)^2$ が常に正であるために、 $a > 0$, $\alpha_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, r$), $b \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, s$) の仮定を設ける。

なお、AR 係数の定常性と反転可能性に関しては、推計結果に基づいて検定することができる。ARMAX-GARCH モデルの誤差項 $u(t)$ の定常性に関する仮説検定は、 $\Theta(L) = 0$ の根がすべて単位円よりも大きいかどうかで検定することが可能である。ここで、 ξ を $\Theta(L) = 0$ の根の逆数の最大の絶対値とすれば、誤差項 $u(t)$ の定常性に関する帰無仮説は、

$$\begin{aligned} H_0: & |\xi| < 1 \\ H_1: & |\xi| \geq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

と定式化できる。ARMAX-GARCH モデルを MCMC 法を用いて推計することにより、 ξ の事後分布を求めることができる。その結果、帰無仮説 (3) を棄却できるかどうか検定することが可能である。時系列モデルが単位根を有する場合、ランダムウォーク過程となり、長期予測における精度確保が困難となる。

4. モデルのベイズ推計手法

(1) ベイズ推計手法の概要

GARCH モデルは非線形性が強く、MCMC 法を利用したベイズ推計法が最尤法より優れていることが指摘

されている²⁴⁾. ベイズ推計法を用いる場合, ξ の事後分布を利用して単位根の存在を判定できるために, 非定常性と非反転性を許容した推計が可能である. 長期劣化進行モデリングのための ARIMAX-GARCH モデルに関する推計に関しても MCMC 法を用いたベイズ推計法が適用可能である. 本研究で提案するようなトレンド項を有する ARIMAX-GARCH モデルのベイズ推計法に関する研究は見当たらないが, MCMC 法を用いた ARMA-GARCH モデルの推計法²⁴⁾を拡張することにより, ARIMAX-GARCH モデルのパラメータを一括推計することが可能である. 本研究で提案する推計方法は, 部分的には MCMC 法を用いた ARMA-GARCH モデルの推計方法²⁴⁾と重複するところがあるが, 読者の便宜を図るため ARIMAX-GARCH モデルの推計方法として一括して示す. MCMC 法を利用したベイズ推計法を説明するために, 観測時系列を $\mathbf{Y} = [y(1), \dots, y(T)]'$, 説明変数を $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1)', \dots, \mathbf{x}(T)']'$ と表す.

いま, すべての未知パラメータのベクトルを $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ と表す. なお, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ である. このとき, 観測時系列と説明変数を既知とした未知パラメータベクトルの同時事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ はベイズの定理

$$\pi(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \propto \mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta})\pi(\boldsymbol{\vartheta}) \quad (4)$$

を通じて, 事前確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\vartheta})$ と尤度関数 $\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta})$ により表すことができる.

ARMAX-GARCH モデルの尤度関数は,

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \exp\left(-\frac{\hat{\varepsilon}(t)^2}{2\sigma(t)^2}\right) \quad (5)$$

と定義される. なお,

$$\hat{\varepsilon}(t) = y(t) - \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\gamma}' - \sum_{j=1}^p \phi_j \{y(t-j) - \mathbf{x}(t-j)\boldsymbol{\gamma}'\} - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}(t-j) \quad (t = 1, \dots, T) \quad (6a)$$

$$\sigma(t)^2 = a + bt + \sum_{j=1}^r \alpha_j \hat{\varepsilon}(t-j)^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma(t-j)^2 \quad (6b)$$

である. また, $\hat{\varepsilon}(0) = y(0)$, $y(t) = 0$ ($t < 0$), $\mathbf{x}(t) = 0$ ($t \leq 0$) とする.

つぎに, 事前確率密度関数を

$$\pi(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}) \quad (7)$$

と設定する. なお, 左下添え字 0 はハイパーパラメータであることを表す. 以上から, 同時事後確率密度関数は式 (4) に式 (5) と式 (7) を代入することにより得る. しかしながら, 式 (5) と式 (7) により表される同時事後確率密度関数は非常に複雑であり確率密度関数を

陽的に導出することができない. これに対して, 数値計算により同時事後確率密度関数を求める方法として, MH (Metropolis-Hastings) 法を基本としたマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション法が Nakatsuma²⁴⁾により提案されている. さらに, 霍見・ラドチェンコ²⁵⁾は Nakatsuma の方法を修正するとともに, MCMC 法に基づく単位根検定法を提案している. 本研究では霍見・ラドチェンコ²⁵⁾の推計手法を踏襲しながら, GARCH 過程に時間トレンド項を加えたような時系列モデルを推計できるように修正を加える.

(2) 同時事後確率密度関数の推計

ARMAX-GARCH モデルの同時事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ を求めるために, 条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリングを用いる. ここでは未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\vartheta}$ の要素を回帰係数ブロック $\boldsymbol{\gamma}$, AR 係数ブロック $\boldsymbol{\phi}$, MA 係数ブロック $\boldsymbol{\theta}$, ARCH ブロック $\boldsymbol{\alpha}$, GARCH ブロック $\boldsymbol{\beta}$ の 5 つのブロックに分割し, 他のブロックのパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数に基づくランダムサンプリングの繰り返しにより同時事後確率密度関数を算出する.

以下に具体的な推計手順を示す.

ステップ 1 事前分布のパラメータ値 $\boldsymbol{\gamma}_0$,

$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}, \boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0}, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}$ を任意に設定する. 本研究では無条件事前分布に近くなるよう分散共分散のパラメータ値を大きく設定することとする. また, 未知パラメータ $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ の初期値 $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(0)}, \boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\beta}^{(0)}]$ を任意に設定する. 初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れる. また, 定常状態に収束した後のサンプリングとは無関係である.

ステップ 2-1 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ を

$\pi(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-2 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ を

$\pi(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-3 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ を

$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-4 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ を

$\pi(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-5 サンプリング回数 i の未知パラメータ

の部分ベクトル $\beta^{(i)}$ を

$\pi(\beta|\gamma^{(i)}, \phi^{(i)}, \theta^{(i)}, \alpha^{(i)}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からランダムサンプリングする.

ステップ3 十分大きな \bar{i} に対して $i > \bar{i}$ ならば $\theta^{(i)} = (\beta^{(i)}, \phi^{(i)}, \varepsilon^{(i)})$ を記録する.

ステップ4 $i = \bar{i}$ ならば計算を終了する. $i < \bar{i}$ ならば $i = i + 1$ とし**ステップ2**へ戻る.

十分大きな \bar{i} に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば, ギブスサンプリングによる $\vartheta^{(i)} (i = \bar{i} + 1, \bar{i} + 2, \dots, \bar{i})$ のサンプリングにより, 式(4)に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\vartheta|\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ からのサンプルを求めることができる. したがって, ギブスサンプリングによって得られる標本 $\vartheta^{(i)} (i = \bar{i} + 1, \bar{i} + 2, \dots, \bar{i})$ を用いて, パラメータベクトル $\vartheta = [\gamma, \phi, \theta, \alpha, \beta]$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる. ただし, **ステップ2** で利用する条件付き事後確率密度関数からは直接にランダムサンプリングすることができない.

(3) 条件付き事後確率密度関数からのサンプリング

条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングできない場合であっても, ランダムウォーク MH 法を利用することにより条件付き事後確率からの標本を得ることができる. ランダムウォーク MH 法では効率的サンプリングを可能とする提案分布を特定化する必要があるが, ARMA-GARCH モデルに関する既往研究で用いられている提案分布²⁵⁾を ARMAX-GARCH モデルに適用する.

いま, 未知パラメータベクトル ϑ に要素を2つのグループに分割する. 第1グループは γ, ϕ, θ , 第2グループは α, β である. それぞれのグループの未知パラメータについて, 異なる提案分布を用いる.

第1グループ γ, ϕ についての提案分布は, ARMAX-GARCH モデル

$$y(t) = \mathbf{x}(t)\gamma' + \sum_{j=1}^p \phi_j \{y(t-j) - \mathbf{x}(t-j)\gamma'\} + \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon(t-j) \quad (8a)$$

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}(t)^2) \quad (8b)$$

に基づく. なお, このとき, 条件付き分散 $\hat{\sigma}(t)^2$ ($t = 1, \dots, T$) は既知であると仮定する. 式(8a)を利用すれば, Chib and Greenberg²⁶⁾による MCMC 法により, 第1グループの未知パラメータのサンプルを提案分布から発生させることができる. 第2グループについての提案分布は, GARCH モデルを近似した

$$\varepsilon(t)^2 = a + bt + \sum_{j=1}^l (\alpha_j + \beta_j)\varepsilon(t-j)^2$$

$$+ w(t) - \sum_{j=1}^s \beta_j w(t-j) \quad (9a)$$

$$w(t) \sim \mathcal{N}(0, 2\hat{\sigma}(t)^4) \quad (9b)$$

に基づく. ここで,

$$l = \max\{r, s\} \quad (10)$$

であり, $j > r$ のとき $\alpha_j = 0$, $j > s$ のとき $\beta_j = 0$ である. モデル(9a)は GARCH モデルの良く知られた特性を利用することにより導くことができる(付録 I 参照). さらに, ランダムウォーク MH 法により条件付き事後確率密度関数を算出する場合には, 式(8a), (9a)をパラメータごとに变形し, 効率的なサンプリング方法を導出できる²⁵⁾. 以下では, 各パラメータを効率的にサンプリングするために具体的に導出した提案分布とサンプリング手順を示す.

a) 回帰係数 γ

ランダムウォーク MH 法により回帰係数 γ の標本を得るための提案分布を導出するために, 式(8a)を以下のように書き直す.

$$y^\gamma(t) = \mathbf{x}^\gamma(t)\gamma' + \varepsilon(t) \quad (11a)$$

$$y^\gamma(t) = y(t) - \sum_{j=1}^p \phi_j y(t-j) - \sum_{j=1}^q \theta_j y^\gamma(t-j) \quad (11b)$$

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = \mathbf{x}(t) - \sum_{j=1}^p \phi_j \mathbf{x}(t-j) - \sum_{j=1}^q \theta_j \mathbf{x}^\gamma(t-j) \quad (11c)$$

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}(t)^2)$$

なお, $y(t) = y^\gamma(t) = 0$ ($t \leq 0$), $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\gamma(t) = 0$ ($t \leq 0$) である. これより, 式(5)を,

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \vartheta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}(t)^2}} \exp\left[-\frac{\{y^\gamma(t) - \mathbf{x}^\gamma(t)\gamma'\}^2}{2\hat{\sigma}(t)^2}\right] \quad (12)$$

と表すことができる. すなわち, ランダムウォーク MH 法において,

$$\gamma^{(*)} \sim \mathcal{N}\left(\gamma^{(i-1)}, \Sigma_\gamma^{(i)}\right) \quad (13)$$

として i 回目の標本の候補を抽出できる. ここで,

$$\Sigma_\gamma^{(i)} = \left\{ \mathbf{X}_\gamma'^{(i-1)} \left(\Sigma_\gamma^{(i-1)} \right)^{-1} \mathbf{X}_\gamma^{(i-1)} + \Sigma_{\gamma_0}^{-1} \right\}^{-1} \quad (14a)$$

$$\mathbf{X}_\gamma^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\gamma(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\gamma(T) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$\Sigma_\gamma^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\sigma}(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (14c)$$

である. ただし, $\hat{\sigma}(t)^{2(i-1)}$ は, $\phi^{(i-1)}$ と $\theta^{(i-1)}$ を用いた式(6a), および $\alpha^{(i-1)}$ と $\beta^{(i-1)}$ を用いた式(6b)を用いて導出できる.

抽出された標本の候補を用いて,

$$p_\gamma = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \gamma^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\gamma}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\gamma^{(i)}|\gamma_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\gamma_0})}{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \gamma^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\gamma}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\gamma^{(i-1)}|\gamma_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\gamma_0})} \quad (15)$$

を計算する. なお, $\boldsymbol{\vartheta}_{-\gamma}^{(i-1)} = [\phi^{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である. 式 (13) により発生させた回帰係数の候補 $\gamma^{(*)}$ は, 確率

$$\lambda_\gamma = \min \{p_\gamma, 1\} \quad (16)$$

に従って受容し, $\gamma^{(i)} = \gamma^{(*)}$ とする. また, 棄却された場合には $\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)}$ とする.

b) AR 係数 ϕ

ランダムウォーク MH 法により AR 係数 ϕ の標本を得るための提案分布を導出するために, 式 (8a) を以下のように書き直す.

$$y^\phi(t) = \mathbf{x}^\phi(t)\boldsymbol{\phi}' + \varepsilon(t) \quad (17a)$$

$$y^\phi(t) = y(t) - \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\gamma}' - \sum_{j=1}^q \theta_j y^\phi(t-j) \quad (17b)$$

$$\mathbf{x}^\phi(t) = [y^\phi(t-1), \dots, y^\phi(t-p)] \quad (17c)$$

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}(t)^2) \quad (17d)$$

なお, $y(t) = y^\phi(t) = 0$ ($t \leq 0$) である. この時, 回帰係数の場合と同様に, ランダムウォーク MH 法を用いて, i 回目の標本の候補 $\phi^{(*)}$ を

$$\phi^{(*)} \sim \mathcal{N}(\phi^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_\phi^{(i)}) \quad (18)$$

より抽出できる. ここで,

$$\boldsymbol{\Sigma}_\phi^{(i)} = \left\{ \mathbf{X}'_\phi^{(i-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_\phi^{(i-1)})^{-1} \mathbf{X}_\phi^{(i-1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{\phi_0}^{-1} \right\}^{-1} \quad (19a)$$

$$\mathbf{X}_\phi^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\phi(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\phi(T) \end{bmatrix} \quad (19b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\phi^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\sigma}(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (19c)$$

である. また, $\hat{\sigma}(t)^{2(i-1)}$ も回帰係数の場合と同様に算出される. 抽出された標本の候補を用いて,

$$p_\phi = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \phi^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\phi}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\phi^{(i)}|\phi_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\phi_0})}{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \phi^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\phi}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\phi^{(i-1)}|\phi_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\phi_0})} \quad (20)$$

を計算する. なお, $\boldsymbol{\vartheta}_{-\phi}^{(i-1)} = [\gamma^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である. 式 (18) により発生させた AR 係数の候補 $\phi^{(*)}$ は, 確率

$$\lambda_\phi = \min \{p_\phi, 1\} \quad (21)$$

に従って受容し, $\phi^{(i)} = \phi^{(*)}$ とする. また, 棄却された場合には $\phi^{(i)} = \phi^{(i-1)}$ とする.

c) MA 係数 θ

ランダムウォーク MH 法により MA 係数 θ の標本を得るための提案分布を導出するために, 式 (8a) を以下のように書き直す.

$$y^\theta(t) = \varepsilon^\theta(t) - \mathbf{x}^\theta(t)\boldsymbol{\theta}' \quad (22a)$$

$$\varepsilon^\theta(t) = y(t) - \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\gamma}' - \sum_{j=1}^p \phi_j \{y(t-j) - \mathbf{x}(t-j)\boldsymbol{\gamma}'\} \quad (22b)$$

$$\mathbf{x}^\theta(t) = [y^\theta(t-1), \dots, y^\theta(t-q)] \quad (22c)$$

なお, $y(t) = y^\theta(t) = 0$ ($t \leq 0$) である. 式 (5) は,

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}(t)^2}} \exp \left[-\frac{\{\varepsilon^\theta(t) + \mathbf{x}^\theta(t)\boldsymbol{\theta}'\}^2}{2\hat{\sigma}(t)^2} \right] \quad (23)$$

と近似できる. 式 (23) は近似尤度であることに留意されたい. 式 (22b) と式 (23) の導出過程は付録 II に示す. このとき, ランダムウォーク MH 法を用いて, i 回目の標本の候補 $\boldsymbol{\theta}^{(*)}$ を

$$\boldsymbol{\theta}^{(*)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{(i)}) \quad (24)$$

より抽出することができる. ここで,

$$\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{(i)} = \left\{ \mathbf{X}'_\theta^{(i-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{(i-1)})^{-1} \mathbf{X}_\theta^{(i-1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0}^{-1} \right\}^{-1} \quad (25a)$$

$$\mathbf{X}_\theta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\theta(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\theta(T) \end{bmatrix} \quad (25b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\sigma}(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (25c)$$

である. また, $\hat{\sigma}(t)^{2(i-1)}$ も, 回帰係数, AR 係数の場合と同様に算出される. 抽出された標本の候補を用いて,

$$p_\theta = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\theta}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0})}{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\theta}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\theta_0})} \quad (26)$$

を計算する. なお, $\boldsymbol{\vartheta}_{-\theta}^{(i-1)} = [\gamma^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である. 式 (24) により発生させた MA 係数の候補 $\boldsymbol{\theta}^{(*)}$ は, 確率

$$\lambda_\theta = \min \{p_\theta, 1\} \quad (27)$$

に従って受容し, $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \boldsymbol{\theta}^{(*)}$ とする. また, 棄却された場合には $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ とする.

d) ARCH 係数 α

ランダムウォーク MH 法により ARCH 係数 α の標本を得るための提案分布を導出するために, 式 (9a) を AR 係数の場合と同様に以下のように書き直す.

$$\varepsilon^\alpha(t)^2 = \mathbf{x}^\alpha(t)\boldsymbol{\alpha}' + w(t) \quad (28a)$$

$$\tilde{\varepsilon}^\alpha(t)^2 = \varepsilon(t)^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \tilde{\varepsilon}^\alpha(t-j)^2 \quad (28b)$$

$$\tau_1^\alpha(t) = 1 + \sum_{j=1}^s \beta_j \tau_1^\alpha(t-j) \quad (28c)$$

$$\tau_2^\alpha(t) = t + \sum_{j=1}^s \beta_j \tau_2^\alpha(t-j) \quad (28d)$$

$$\varepsilon^\alpha(t)^2 = \tilde{\varepsilon}^\alpha(t)^2 - \sum_{j=1}^s \beta_j \tilde{\varepsilon}^\alpha(t-j)^2 \quad (28e)$$

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = [\tau_1^\alpha(t), \tau_2^\alpha(t), \tilde{\varepsilon}^\alpha(t-1), \dots, \tilde{\varepsilon}^\alpha(t-r)] \quad (28f)$$

$$w(t) \sim \mathcal{N}(0, 2\hat{\sigma}(t)^4)$$

なお, $\varepsilon(t) = \varepsilon^\alpha(t) = 0$ ($t \leq 0$) である. これにより, 式 (9a) の下で ε が発生する条件付き確率密度は,

$$\mathcal{L}(\varepsilon|\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\hat{\sigma}(t)^4)}} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon^\alpha(t) - \mathbf{x}^\alpha(t)\boldsymbol{\alpha}')^2}{2(2\hat{\sigma}(t)^4)}\right\} \quad (29)$$

として表現でき, ランダムウォーク MH 法において,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_\alpha^{(i)}) \quad (30)$$

として i 回目の標本の候補を抽出できることを示している. ここで,

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha^{(i)} = \left\{ \mathbf{X}'_\alpha^{(i-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_\alpha^{(i-1)})^{-1} \mathbf{X}_\alpha^{(i-1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha_0}^{-1} \right\}^{-1} \quad (31a)$$

$$\mathbf{X}_\alpha^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\alpha(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\alpha(T) \end{bmatrix} \quad (31b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\sigma}(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (31c)$$

である. また, $\hat{\sigma}(t)^{2(i-1)}$ は他のパラメータの場合と同様に算出される.

抽出された標本の候補を用いて,

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\alpha}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}|\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha_0})}{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\alpha}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}|\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha_0})} \quad (32)$$

を計算する. なお, $\boldsymbol{\vartheta}_{-\alpha}^{(i-1)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である. 式 (30) により発生させた ARCH 係数の候補 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ は, 確率

$$\lambda_\alpha = \min\{\mathbf{p}_\alpha, 1\} \quad (33)$$

に従って受容し, $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ とする. また, 棄却された場合には $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}$ とする.

e) GARCH 係数 $\boldsymbol{\beta}$

MA 係数の場合と同様に, 式 (9a) を

$$\varepsilon^\beta(t)^2 = \nu^\beta(t) - \mathbf{x}^\beta(t)\boldsymbol{\beta}' \quad (34a)$$

$$\nu^\beta(t) = \varepsilon(t)^2 - a - bt - \sum_{j=1}^l (\alpha_j + \beta_j)\varepsilon(t-j)^2 \quad (34b)$$

$$\mathbf{x}^\beta(t) = -[\varepsilon^\beta(t-1)^2, \dots, \varepsilon^\beta(t-s)^2] \quad (34c)$$

と書き直す. $\varepsilon(t) = \varepsilon^\beta(t) = 0$ ($t \leq 0$) である. 式 (23) と同様に近似尤度を,

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\hat{\sigma}(t)^4)}} \exp\left[-\frac{\{\nu^\beta(t) - \mathbf{x}^\beta(t)\boldsymbol{\beta}'\}^2}{2(2\hat{\sigma}(t)^4)}\right] \quad (35)$$

と表現できる. このとき, ランダムウォーク MH 法を用いて i 回目の標本の候補 $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ を,

$$\boldsymbol{\beta}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i)}) \quad (36)$$

と抽出できる. ここで,

$$\boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i)} = \left\{ \mathbf{X}'_\beta^{(i-1)} (\boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i-1)})^{-1} \mathbf{X}_\beta^{(i-1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_0}^{-1} \right\}^{-1} \quad (37a)$$

$$\mathbf{X}_\beta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\beta(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\beta(T) \end{bmatrix} \quad (37b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\sigma}(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \quad (37c)$$

である. また, $\hat{\sigma}(t)^{2(i-1)}$ は他のパラメータの場合と同様に算出される.

抽出された標本の候補を用いて,

$$\mathbf{p}_\beta = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\beta}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}^{(i)}|\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_0})}{\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\beta}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}|\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_0})} \quad (38)$$

を計算する. なお, $\boldsymbol{\vartheta}_{-\beta}^{(i-1)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}]$ である. 式 (36) により発生させた GARCH 係数の候補 $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ は, 確率

$$\lambda_\beta = \min\{\mathbf{p}_\beta, 1\} \quad (39)$$

に従って受容し, $\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \boldsymbol{\beta}^{(i)}$ とする. また, 棄却された場合には $\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}$ とする.

(4) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて, パラメータベクトル $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ に関する推計値を決定することができる. いま, MCMC 法により得られた標本を $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}] = [\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}, \dots, \vartheta_K^{(i)}]$ と表すこととする. このうち, 最初の i 個の事後分布への収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\bar{i}+1, \dots, \bar{i}\}$ と定義する. このとき, パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の同時確率分布関数 $G(\boldsymbol{\vartheta})$ は

$$G(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\#\{\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M}\}}{\bar{i} - \bar{i}} \quad (40)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数で

ある. また, パラメータ ϑ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}(\vartheta)$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\vartheta) &= (\tilde{\zeta}(\vartheta_1), \dots, \tilde{\zeta}(\vartheta_K)) \\ &= \left(\sum_{i=i+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_1^{(i)}}{\bar{i}-i}, \dots, \sum_{i=i+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_K^{(i)}}{\bar{i}-i} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

と表される. また, ギブスサンプリングによる標本を用いて, パラメータ ϑ の信用区間を定義できる. 100(1-2 κ)%信用区間は, 標本順序統計量 ($\vartheta_k^\kappa, \bar{\vartheta}_k^\kappa$) ($k = 1, \dots, K$)

$$\vartheta_k^\kappa = \arg \max_{\vartheta_k^*} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \leq \vartheta_k^*, i \in \mathcal{M})}{\bar{i}-i} \leq \kappa \right\} \quad (42a)$$

$$\bar{\vartheta}_k^\kappa = \arg \min_{\vartheta_k^*} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \geq \vartheta_k^*, i \in \mathcal{M})}{\bar{i}-i} \leq \kappa \right\} \quad (42b)$$

を用いて $\vartheta_k^\kappa < \theta_k < \bar{\vartheta}_k^\kappa$ と定義できる.

MCMC 法では, 初期パラメータ値 $\vartheta^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. 発生させた \bar{i} 個のサンプルが不変分布からの標本であるか否かは Geweke 検定により判断することができる²⁷⁾⁻²⁹⁾. ここで, ϑ の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

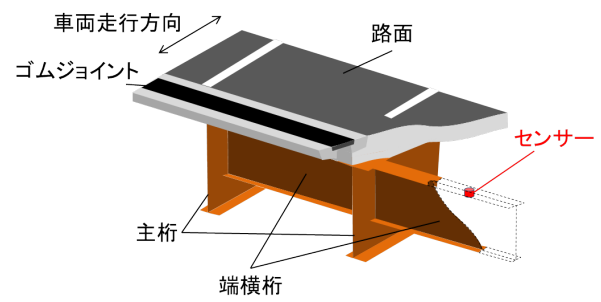
$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\theta_k}| \leq z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\theta_k}| > z_{\psi/2} \end{cases} \quad (43)$$

と設定する. ただし, $z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である. 有意水準 $\psi\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合, $z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$ を満足する値として定義できる. ただし, $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である.

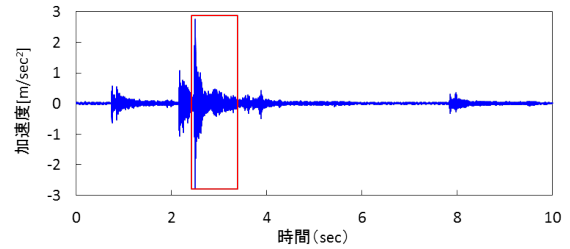
5. モニタリングデータへの適用

(1) ジョイントの長期モニタリングデータ

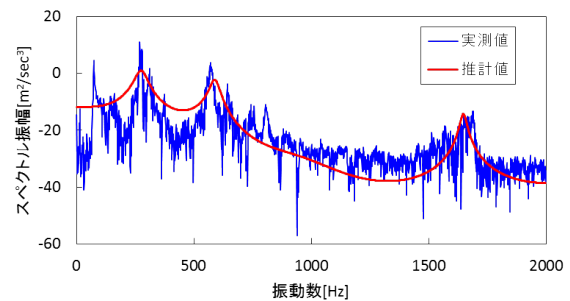
本研究では, 阪神高速道路の同一線内に設置された6箇所のゴム製ジョイントを対象として加速度応答の長期モニタリングを試みた. 6箇所のジョイントに関しては目視点検データを用いた統計的劣化予測³⁰⁾により, 劣化の進展が速いジョイント4箇所, 平均的なジョイント2箇所に対して, モニタリングシステムの設置状況等を勘案しながら選定した. センサーの設置状況を図-1(a)に示す. モニタリングシステムおよび設置方法の詳細は文献⁷⁾を参照されたい. また, 6箇所のジョイントについては便宜的に J1 から J6 と呼称する. 事前の路上点検を通して, J1 はジョイント本体中央にき裂が, J2 は本体中央の浮きと摩耗が, J3 はコンクリー



(a) ゴムジョイントとセンサー設置位置



(b) 加速度応答



(c) スペクトル

図-1 加速度応答とスペクトル

トとの間にすきまが, J4 は本体中央にき裂がそれぞれ確認されている (J5 と J6 は損傷が確認されていない). なお, これ以降, 顕著な統計的特徴が確認された J1 と J5 に焦点を当てて議論することとする.

筆者らによる点検者に対するヒアリング調査の結果, 高速道路のゴム製ジョイントの劣化は車両通過時の「音」の変化により判断できるという経験的知を得ている. このような音の変化は, ジョイント部における加速度応答を計測することにより把握できる. さらに, ジョイント部の局所的振動に関する情報を用いることにより, 全体振動に関する情報よりも当該部分の損傷・劣化に関する感度の高い情報が得られるという指摘³¹⁾もある. ただし, 車両通過音や異音の直接計測に関しては, マイクロフォンによる計測は指向性を有するため, 損傷・劣化が顕在化していないジョイントのように音源を特定できない場合には計測が困難になることが想定されたので断念した. 以上の判断に基づいて, 本研究ではこれら6箇所のゴム製ジョイントに対して, 2012年2月28日から同年12月13日までに得られた約10か月分の

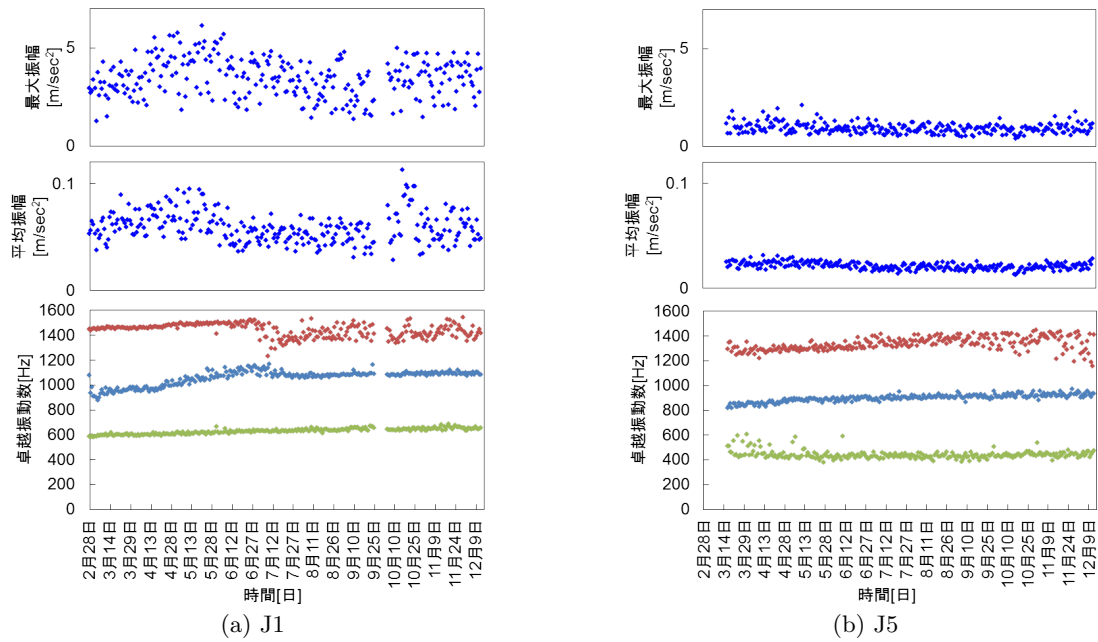


図-2 ジョイントのモニタリングデータ

表-1 推計結果の例 (J1 の 600Hz 付近 : ARMA(1,0)-GARCH(1,0))

	事後分布統計量		Geweke 検定統計量
	期待値	95%信頼区間	
γ_1 : 定数項	587.3	(585.1 589.8)	0.027
γ_2 : 時間トレンド	0.224	(0.214 0.234)	-0.031
γ_3 : 降水量	—	—	—
γ_4 : 気温	0.390	(0.282 0.499)	0.008
γ_5 : 風速	—	—	—
ϕ_1 : 1 次の AR 係数	0.225	(0.151 0.300)	-0.005
a : $\sigma(t)^2$ の定数項	23.13	(17.83 29.48)	-0.001
b : $\sigma(t)^2$ の時間トレンド	0.132	(0.180 0.084)	-0.009
α_1 : 1 次の ARCH 係数	0.020	(0.002 0.055)	-0.011
BIC	3853.7		

加速度応答を用いて卓越振動数を同定し、その長期変動状況を ARMAX-GARCH モデルを用いて表現した。モニタリングデータに関して、各ジョイントの加速度応答は各日特定時刻から 5 分間、サンプリング周波数 4kHz で観測されている。事前処理として、得られた加速度応答から最大値を記録した時点を開始時点として、加速度応答を 1 秒間分を切り出し (図-1(b))、AR モデルを用いてスペクトル密度を推計し (図-1(c))、3 つ卓越振動数をその日のモニタリングデータの代表値として蓄積した。なお、本研究では、卓越振動数以外にも、加速度応答の最大値や平均値、減衰比など、複数の物理量に対して検討を行ったが、最終的に卓越振動数に着目したことを断っておく。以上の事前処理により得られた卓越振動数の時系列を 図-2 にそれぞれ示す。

いずれのジョイントにおいても、加速度応答は橋上を通過する大型車により励起される。モニタリング時に通過する大型車は日々変化すると考えられるために、

加速度応答の最大値も日々異なる。ただし、6 箇所のジョイント設置位置は隣接しており、同一日の加速度応答は同一の大型車によって励起されたと考えられる。図-2 の J1 と J5 を比較すると、損傷が確認された J1 の方が加速度の最大値の変動が大きい、この原因が損傷に起因するか否かは特定できていない。ただ、加速度応答から同定された卓越振動数の時系列を確認すると、J1 と J5 でそれほどの相違は確認できない。また、両者の低次 2 つの卓越振動数は比較的安定していることがわかる。一方で、高次の卓越振動数は途中から分散 (変動) が大きくなっていることが理解できる。

(2) ARMAX-GARCH モデルの推計結果

ARMAX-GARCH モデルのベイズ推計に際しては、サンプリング回数を 20,000 回とし、最初の 6,000 回は不変分布に収束するまでの回数 (バーンイン) と考え、後半 14,000 回のサンプリングで得られた標本から事後

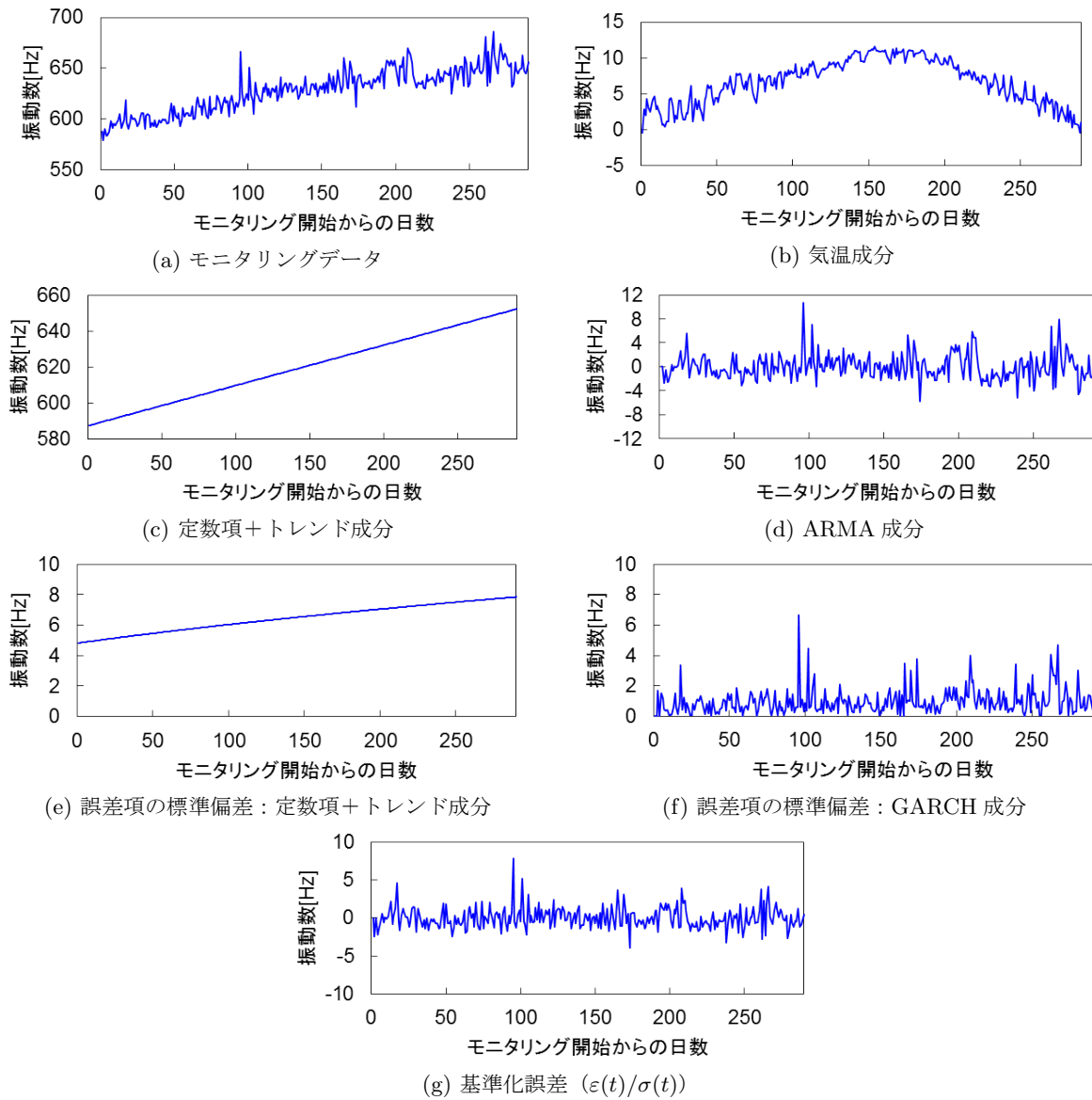


図-3 ARMAX-GARCH モデルの各成分

分布の統計量を算出した。不変分布への収束は Geweke 検定統計量により検定した。また、AR 次数 p , MA 次数 q , ARCH 次数 r , GARCH 係数 s の選択基準として、

$$\text{BIC} = -2\ln(\mathcal{L}) + k^\theta \ln(T) \quad (44)$$

で表される BIC³²⁾ (Bayes Information Criterion) を採用し、BIC が最小となる次数を最適モデルとした。式中、 k^θ は独立な変数の数である。さらに、モデルの説明変数の候補として、 x_1 : 定数項, x_2 : 時間トレンド, x_3 : 降水量, x_4 : 気温, x_5 : 風速を採用した。対象としたジョイントはすべて近接していることから、 x_3 から x_5 の説明変数は全てのジョイントで同値であるとし、モニタリング箇所と近接する地方気象台の観測値を利用した。モニタリング期間において、降水量 x_3 は 1 日最大約 200mm, 気温 x_4 は -2 度~30 度, 風速 x_5 は最

大 7.5m/秒であった。また、回帰係数は、推計した事後分布の 95%信頼区間の内側に 0 を含む場合、その変数の有意性に対する帰無仮説を棄却できないために、変数として採用しないこととした。

推計結果の一例として、J1 の 600Hz 付近のモニタリングデータに対して ARMAX-GARCH モデルを適用した結果を表-1 に示す。なお、BIC は、AR 次数 $p = 1$, MA 次数 $q = 0$, ARCH 次数 $r = 1$, GARCH 係数 $s = 0$ (以下、ARMA(1,0)-GARCH(1,0)) のときに最小となった。また、モニタリングデータに影響を及ぼす環境因子として、気温 x_4 のみが選択された。さらに、各未知パラメータの Geweke 検定統計量はすべて絶対値で 1.96 を下回っており、不変分布へ収束していないとする帰無仮説を棄却できる。表中 γ_1 と γ_2 で示される定数項と時間トレンドの事後分布の期待値は、モニ

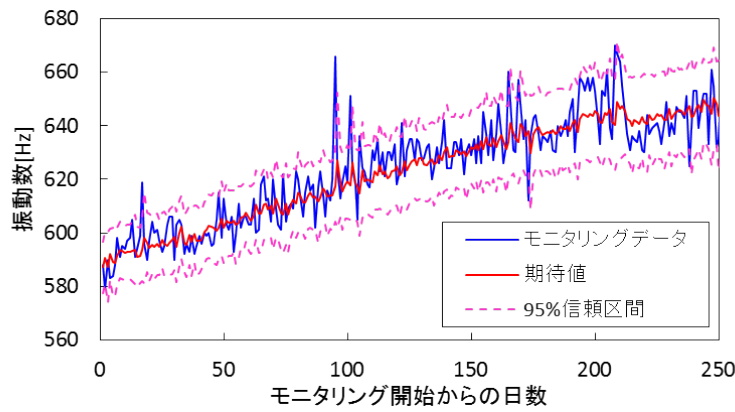


図-4 ARMAX-GARCH モデルとモニタリングデータ (J1 : 600Hz 付近)

表-2 推計結果一覧 (期待値部分)

	定数項	時間トレンド	降水量	気温	風速	AR 過程			MA 過程
	γ_1 Hz	γ_2 Hz/day	γ_3 Hz/mm/day	γ_4 Hz/°C	γ_5 Hz/m/sec	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ_1
J1-1	587.4	0.224	—	0.390	—	0.225	—	—	—
J1-2	1023.3	0.307	0.372	0.069	—	0.984	—	—	-0.721
J1-3	1448.3	0.203	—	—	—	0.855	0.117	—	-0.722
J2-1	639.5	0.236	—	—	—	0.002	—	—	—
J2-2	876.3	0.121	-2.887	0.125	—	0.950	—	—	-0.836
J2-3	1294.3	0.008	-1.735	0.085	—	0.915	—	—	-0.738
J3-1	299.1	—	—	-2.245	—	0.987	—	—	-0.808
J3-2	833.2	0.305	-1.713	0.736	—	0.218	-0.016	0.136	—
J3-3	1303.4	-0.383	—	—	—	1.050	-0.077	—	-0.870
J4-1	528.8	-0.136	—	1.239	—	0.489	0.476	—	—
J4-2	1073.3	-0.453	—	1.991	—	0.142	—	—	—
J4-3	1392.5	0.143	—	0.881	—	0.476	0.260	—	—
J5-1	458.1	-0.048	—	-1.131	—	0.062	—	—	—
J5-2	844.2	0.270	-1.942	0.531	—	0.187	—	—	—
J5-3	1229.7	0.467	—	0.552	—	0.053	—	—	—
J6-1	444.1	0.412	—	—	—	0.393	—	—	—
J6-2	838.2	0.395	3.736	—	—	0.840	0.041	—	-0.657
J6-3	1341.5	0.466	—	—	—	0.248	0.352	—	—

タリングデータが 587.3Hz を基準として、1 日経過するごとに 0.224Hz ずつ上昇していることを表す。また、同様に、 γ_4 で示される気温の事後分布の期待値は、気温が 1 度上昇するごとに 0.390Hz モニタリングデータが上昇することを示している。さらに、短期的な変動を表す AR 係数は 1 次のみが採用され、その推計値は 0.225 であった。これは特定日のモニタリングデータの変動の 20%程度が前日のモニタリングデータの値に依存していることを示している。一方で、モニタリングデータの分散に関して、 a と b の事後分布の期待値から 23.13Hz^2 を基準として、1 日経過するごとに 0.132Hz^2 ずつ上昇していることがわかる。また、モニタリングデータの分散の短期的な変動を表す ARCH 係数は 1 次のみが採用され、その推計値は 0.020 となっており、特定日のモニタリングデータの分散の変動の 2%程度しか

前日のモニタリングデータの値に依存しないことを示している。

図-3 には、J1 の 600Hz 付近の卓越振動数に着目した ARMAX-GARCH モデルの推計結果を各種成分ごとに提示する。気温成分、時間トレンド成分、ARMA 成分、誤差項の標準偏差成分、GARCH 成分、基準化誤差成分を確認することができる。さらにこれらを統合した ARMAX-GARCH モデルとモニタリングデータを図-4 に示す。図中にはモニタリングデータを青印で、ARMAX-GARCH モデルの期待値を赤線で、ARMAX-GARCH モデルの 95%信頼区間を桃色点線でそれぞれ示している。同図より、モニタリングデータの全体的な傾向が本研究で提案したモデルの 95%信頼区間の中で表現されていることが見て取れる。また、全体として時間の経過に伴うモニタリングデータの上昇を確認

表-3 推計結果一覧 (分散部分)

	定数項	時間トレンド	ARCH 過程		GARCH 過程
	a	b	α_1	α_2	β
J1-1	23.1	0.233	0.020		
J1-2	115.2	0.022	0.111	0.095	0.090
J1-3	3.2	0.137	0.109	—	0.787
J2-1	877.3	0.807	0.084	—	—
J2-2	137.9	0.419	0.108	—	—
J2-3	568.1	0.112	0.236	—	—
J3-1	232.7	0.054	0.073	—	0.750
J3-2	85.8	0.169	0.019	—	—
J3-3	84.2	—	0.084	—	0.801
J4-1	36.5	0.108	0.351	—	0.261
J4-2	727.6	0.120	0.147	—	0.451
J4-3	57.5	0.032	0.049	—	—
J5-1	163.6	0.045	0.177	—	0.221
J5-2	59.1	0.151	0.024	—	0.192
J5-3	66.9	0.192	0.038	—	0.602
J6-1	22.0	—	0.221	—	—
J6-2	856.8	0.284	0.034	—	—
J6-3	44.8	—	0.111	—	0.428

できる。本研究の提案手法を用いることで、これらの変動の中から気温や短期的な変動とは異なる長期的な変動を時間トレンドとして抽出できる。さらに、点線で示した 95%信頼区間についても、短期的な変動を伴いながら、時間の経過とともに徐々に大きくなっていることが確認できる。

同様にして全てのモニタリングデータに対して推計した結果を表-2, 3 に示す。採用された説明変数から、風速はいずれのジョイントのどの周波数帯においてもモニタリングデータに影響を及ぼさない。一方で、降水量は 800Hz 程度の振動数帯におけるモニタリングデータに対して説明変数として採用される場合が多いが、符号条件が一定ではなく、その物理的な要因は定かでない。これに対して気温については、多くのモニタリングデータに対して影響を及ぼしていることが見て取れる。また、その多くは正值を取っていることから気温の上昇・下降に伴って振動数も上昇・下降する傾向がみられる。特に、800 から 1,000Hz 程度のモニタリングデータでは全て正の推計値が得られている。一方で、説明変数のうち、時間トレンド γ_2 に着目する。 γ_2 は多くのモニタリングデータで正值となっており、全体としては、時間の経過に伴って振動数が上昇する傾向にあることがわかる。さらに、分散部分の時間トレンド b に関しても時間の経過とともに増幅する傾向にある。また、分散部分に関しては、その定数項 a がモニタリングデータによって大きくばらついていることもわかる。

また、J5 の 1,230Hz の卓越振動数に対するモデル推計に関して、図-5 に GARCH 成分を、図-6 に ARMAX-GARCH モデルをそれぞれ示す。当該モニタリングデータに関しては、BIC が ARMA(1,0)-GARCH(1,1) で最

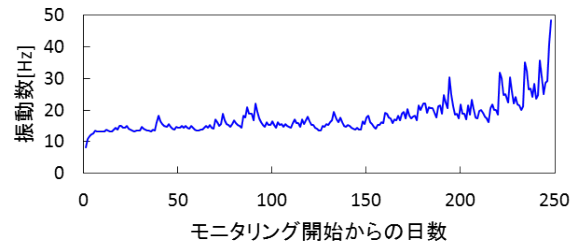


図-5 誤差項の標準偏差 : GARCH 成分 (J5)

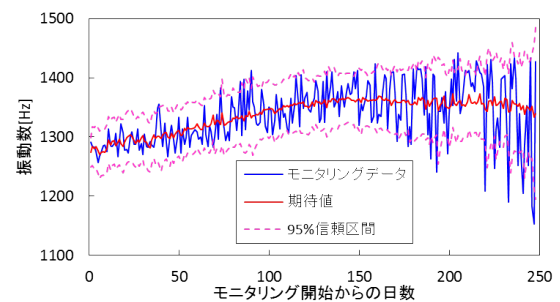


図-6 ARMAX-GARCH モデルとモニタリングデータ (J5 : 1300Hz 付近)

小となった。図-5 の GARCH 成分に着目すると、図-3 と異なり、時間の経過とともに変動が大きくなっていることが読み取れる。ARMAX-GARCH モデルと実際のモニタリングデータと比較しても、図-6 に示すように分散の変動を捉えていることがわかる。このように従来の時系列モデルでは表現することができない分散の変動を表現できる。

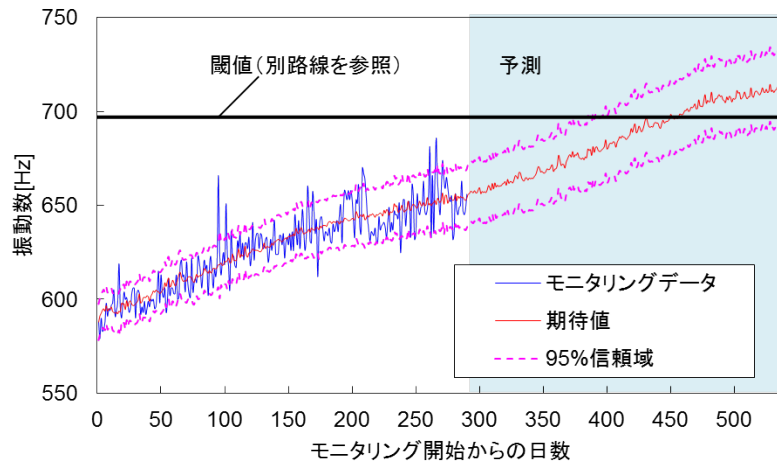


図-7 J1 のモニタリングデータの予測と閾値

(3) 詳細点検時期の予測

2.(1) で述べたように、本研究で対象とするモニタリングは、長期にわたるモニタリングデータに基づいてジョイントの劣化や異常を検知（詳細点検時期を予測）することが重要である。異常検知にはその判断根拠となる指標が必要となる。指標としては、1) 長期モニタリングデータの統計的特徴の変化をそれ自身のデータとの相対比較により判断する、2) 類似の劣化特性を有するジョイントの異常検知時点での劣化特性を参照情報として用いる、ことが考えられる。本研究で提案した長期劣化進行モデルの特徴は、分散の変動を捉える点にあり、本来であれば分散、あるいは平均値の変動率を判断指標とすることが望ましい。しかし、現時点ではデータが蓄積されていない。そこで、本研究では後者の観点、具体的には類似のジョイントを対象に、取換え前後のモニタリングデータの変化を閾値として、その閾値に達する時点予測する。ただし、その場合には箇所によって異なる卓越振動数の値や分散の値を考慮する必要がある。本研究で対象としたモニタリング箇所においてもほぼ同様の劣化状況にもかかわらず、卓越振動数の値や分散の値は異なっていた。これは劣化箇所や橋梁端部の構造の相違に起因すると考えられる。このことから、同一箇所で行った取換えの際のモニタリングデータや同一構造で同様の劣化箇所、劣化性状を有しているジョイントのモニタリングデータを利用することが現実的であるとされる。本研究では、別路線にて J1 と同様の損傷を有するジョイントの取換え前後のモニタリングデータを、J5 に関してはモニタリング期間中に取換えを実施している。その値を J1 や J5 の閾値として利用可能であるとされる。具体的には、1) J1 のゴム製ジョイントは、500 から 600Hz 付近のモニタリングデータが 697Hz となった場合に、き

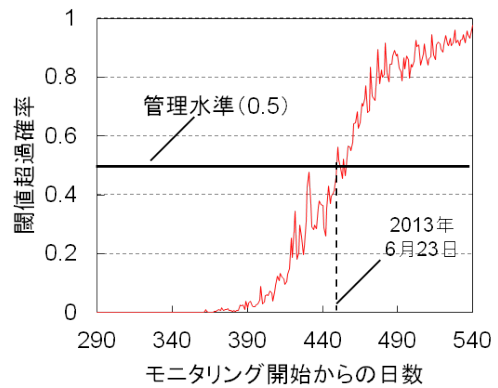


図-8 J1 のモニタリングデータに基づく要点検時期の予測

裂、浮きは要点検の状態であること、2) J5 のゴム製ジョイントは、500Hz 付近の分散が $2,977\text{Hz}^2$ (標準偏差が 56Hz) となった場合に、き裂、腐食、盛上りにより要点検の状態であることの 2 点を取換え前後のモニタリングデータから確認している。

J1 と J5 について、把握した閾値を利用し、要点検時期の予測を行った。例として、J1 のモニタリングデータの今後の推移と閾値を併せて図-7 に示す。図-7 よりモニタリングデータの予測結果と別路線で得られた閾値が今後 1 年程度の間に関わることを確認できる。さらに、図-8 には、予測値が閾値を超える確率（閾値超過確率）とモニタリング開始からの日数の関係を示す。図-8 に対して、管理水準を設定することにより、点検時期を求めることができる。閾値超過確率はジョイントに対する詳細点検が必要な時期に達している確率を表す。図中には管理水準として期待値である 50% を用いた例を示している。管理水準の設定には工学的観点のみならず、管理者の経営的観点も考慮する必要があり、

表-4 たたき・目視点検による劣化進行状況

	き裂進展長さ [mm]	浮き範囲の拡大 [mm]	摩耗範囲の拡大 [mm]
J1	200	450	0
J2	600	200	50
J3	0	0	0
J4	100	500	50
J5	0	0	0
J6	0	0	0

一意に決定できない。今回の場合、暫定的に管理水準を50%に設定すれば、2013年6月23日を目処に詳細点検を実施すればよいことがわかる。なおJ5については、今後2年以上閾値に達しないことを確認している。

(4) 長期モニタリングデータ活用への展望

表-2, 3に示したモニタリングデータの統計的特徴のうち、ジョイントの状態や劣化との関連性が高いと考えられる、定数項 γ_1 、時間トレンド γ_2 、分散部分の定数項 a 、分散部分の時間トレンド b に着目し、たたき・目視点検で把握した劣化の状態との比較を行う。

はじめに、本研究の提案モデルで劣化の進行を表す成分として導入した時間トレンドの推計値とたたき・目視点検より得られた具体的な劣化の進行具合を比較する。表-4には、対象とした6箇所のゴム製ジョイント本体における2012年2月23日から2013年1月28日にかけて進行したき裂、浮き、摩耗の進行量を示している。なお、同一の劣化項目が複数存在する場合は、劣化進展が最も著しかった部分の値を代表値として示している。これらの劣化の進行具合と各ジョイントにおけるモニタリングデータの時間トレンド γ_2 およびモニタリングデータの分散の時間トレンド b を比較する。

図-9には、それぞれジョイントのき裂、浮き、摩耗の進展量とモニタリングデータの時間トレンド γ_2 の関係を示している。モニタリングデータの時間トレンド γ_2 がジョイントの劣化を表している場合、ジョイントの劣化の進行と時間トレンド γ_2 の間には相関性が存在すると考えられる。これを踏まえて、図-9を確認すると、図-9(a)および図-9(c)では、いずれの振動数帯のモニタリングデータにも劣化の進展量と時間トレンドとの間に何らかの関係性を見出すことは困難である。しかしながら、図-9(b)に示したジョイントの浮き範囲の進行量は、図中に赤で示す、800Hz付近のモニタリングデータの時間トレンド γ_2 と負の相関を見て取ることができる。すなわち、ジョイントで浮き範囲が進行するほど、モニタリングデータの卓越振動数が低下することが示唆される。なお、ゴム製ジョイントの浮き範囲が0mmである場合にも、時間トレンドは0.3程度の値を有し、0でないことに留意する必要がある。すなわち、

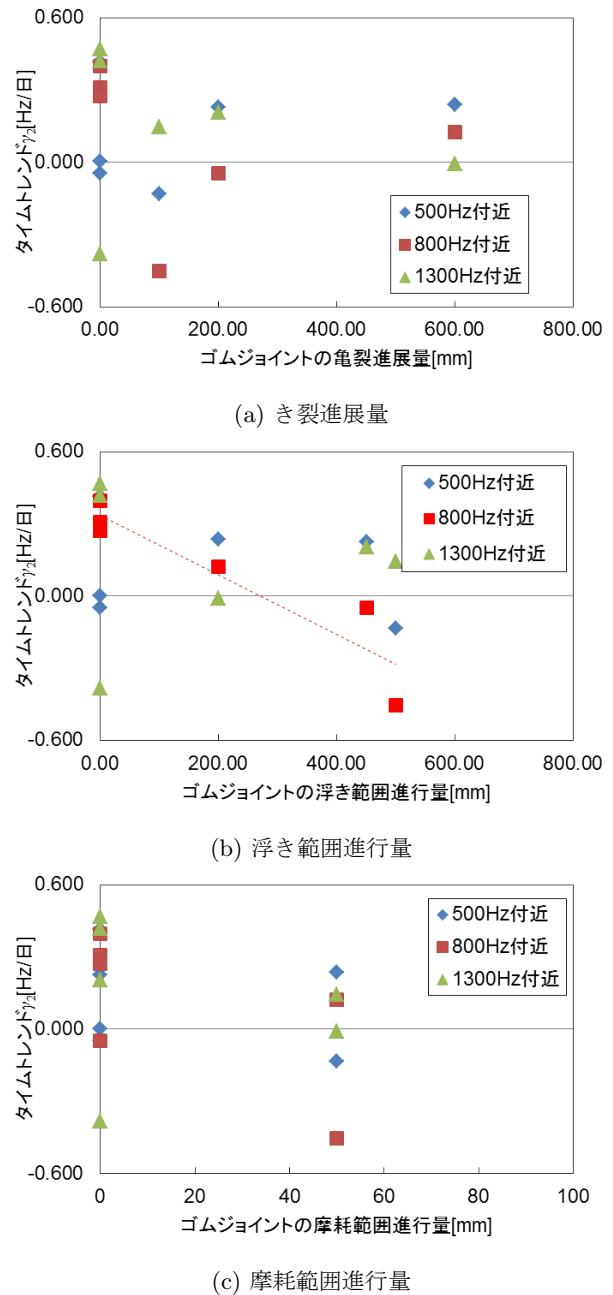


図-9 ゴム製ジョイントの劣化と時間トレンド γ_2

ジョイントに何らかの劣化や異常がない場合、モニタリングデータは1日に0.3Hz程度上昇していく。これに対して浮きが存在する場合には、浮き範囲が広がることでモニタリングデータは低下していく。すなわち、モニタリングデータの時間トレンドが0.3よりも小さい場合には、その量に応じた浮きの発生を判断できる可能性がある。なお、モニタリングデータの上昇に関しては、原因は不明であるが、少なくともたたき・目視点検で表面の浮きは確認されていない。

図-10には、それぞれジョイントのき裂、浮き、摩耗の進展量とモニタリングデータの分散の時間トレンド b の関係を示している。モニタリングデータの分散

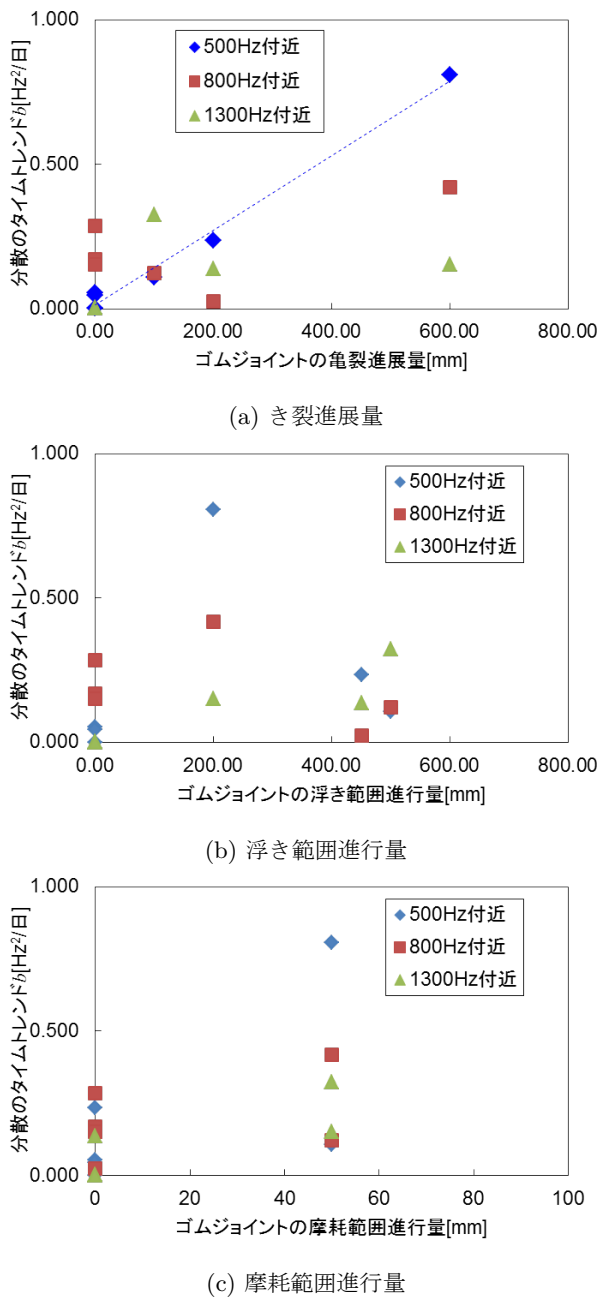


図-10 ゴム製ジョイントの劣化と分散の時間トレンド b

の時間トレンド b がゴム製ジョイントの劣化を表している場合には、ゴム製ジョイントの劣化の進行と相関性を有すると考えられる。これを踏まえて、図-10(a)から(c)を見ると、図-10(b)および図-10(c)では、いずれの振動数帯のモニタリングデータの分散も劣化の進展量と時間トレンドに関係性を見ることは困難である。しかし、図-10(a)に示したゴム製ジョイントのき裂進展量は、図中に青で示す、500Hz 付近のモニタリングデータの時間トレンド γ_2 と正の相関を見て取ることができる。すなわち、ゴム製ジョイントのき裂が進展するほどモニタリングデータの分散は大きくなることが示唆される。なお、き裂が進展していない場合、分

散の時間トレンドは0 付近となっている。これにより、500Hz 付近のモニタリングデータの分散の時間トレンドからき裂の進展具合を判断できる可能性がある。以上をまとめると、ジョイントの長期モニタリングデータのうち、1) 800Hz 付近の時間トレンドは浮きの進行を、2) 500Hz 付近の分散の時間トレンドはき裂の進展を、それぞれ表している可能性が確認できた。

現時点では、対象としたゴム製ジョイントのモニタリング期間およびサンプル数も少なく、確定的な議論は難しい。しかし、長期間のモニタリングデータを蓄積することにより、提案した方法論を用いて、このようなビッグデータの背後に隠れた統計的規則性を計測できる。現時点では、ゴム製ジョイントの現実的な劣化の進展メカニズムやモデルのパラメータと劣化過程の工学的な因果関係に関する理論的知見は必ずしも十分に蓄積されていないのが実情である。しかし、理論的知見の蓄積が得られていなくても、ビッグデータを解析することにより、ゴム製ジョイントの劣化に関する異常値検出や劣化に対する緊急対応や更新時期の決定という実務的判断のために有用な情報を提供できる。また、平均値では有意な変動が確認できない場合でも、分散の変動に着目することで有意な変動を確認できる可能性がある。ビッグデータを用いる利点は、平均値ではなく、分散を用いた意思決定(議論)を可能とする点にもある。なお、ジョイントの劣化とモデルパラメータとの工学的な因果関係を分析することは極めて重要な課題であるが、本研究の範囲を大きく超えるものであり、今後の課題として記載するに止める。

6. おわりに

本研究では、長期モニタリングにより蓄積した時系列データを用いて、モニタリングデータに介在する多くの影響因子と誤差・ノイズを分離するとともに、構造物の異常や劣化と関連性の高い統計的特徴量を抽出する方法論を提案した。具体的には、劣化の進行過程を外生変数を考慮した ARMA モデルで表現するとともに、その誤差項の分散の変動を確定トレンド付きの GARCH 過程で表現した ARMAX-GARCH モデルとその推計方法を提案した。また、ARMAX-GARCH モデルで表現した統計的特徴とたたき・目視点検により把握した劣化状態の関係を明らかにした。さらに、本モデルを用いた予測法として、モニタリングデータの閾値を利用した方法を提案し、高架橋のジョイント部材を対象として本モデルの適用可能性について考察した。長期間蓄積したモニタリングデータに基づく統計モデルを利用した異常事象の早期検出、点検業務の効率化、劣化予測、診断等の方法論に関する研究は緒に

ついたばかりであり、今後の多くの研究課題が残されている。本研究で提案した ARMAX-GARCH モデルに関しても、モデルの実用可能性を高めていく上でいくつかの研究課題が残されている。第 1 に、本研究ではジョイント部の長期劣化傾向を確定的トレンド項として表現している。しかし、長期劣化傾向は、社会基盤施設が履歴した短期的なイベントの蓄積の結果として発生するものであり、このような劣化トレンドを生み出している原因をモデルに内包することが必要である。このような長期トレンドの確率的分析を実施するためには、長期記憶性を考慮した確率過程モデルとその推計手法の開発、長期記憶性の検定手法の開発が必要である。第 2 に、早期異常検知や、詳細点検実施時期の決定のための統計的意思決定アルゴリズムの開発があげられる。このためには理論的な側面からの検討はもちろんであるが、モニタリングの適用範囲を拡大し、データを蓄積することが重要である。第 3 に、ジョイントの劣化進展と、モデルパラメータの因果関係を工学的な観点から考察することが重要である。そのためにはジョイントに対する荷重載荷試験等を実施するとともに、その際の加速度応答を計測することが必要である。このような工学的な因果関係の検討は、長期モニタリングデータを用いた早期異常検知システムの信頼性を向上する上で、極めて重要な検討課題である。さらに、本提案手法を他構造物や他部材に対する長期モニタリングデータへ拡張し、方法論の適用範囲の拡大とその限界に関して議論を深めることも不可欠である。

本研究を実施するにあたり、阪神高速技術株式会社・塚本成昭氏にご協力頂いた。また、本研究の一部は(一財)国土技術研究センター、第 15 回研究開発助成により実施した。ここに記して感謝の意を表す。

付録 I 式 (9a) の導出

Bollerslev¹⁸⁾が示したように、GARCH(r, s) モデル (1c) は $\varepsilon(t)^2 (t = 1, \dots, T)$ の ARMA(l, s) 過程として、

$$\begin{aligned} \varepsilon(t)^2 = a + bt + \sum_{j=1}^l (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon(t-j)^2 \\ + \tilde{w}(t) - \sum_{j=1}^s \beta_j \tilde{w}(t-j) \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

と表現される。ここで、 $\tilde{w}(t) = \varepsilon(t)^2 - \sigma(t)^2$ であり、

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) = \varepsilon(t)^2 - \sigma(t)^2 = \sigma(t)^2 \left(\frac{\varepsilon(t)^2}{\sigma(t)^2} - 1 \right) \\ = \sigma(t)^2 (\chi^2(1) - 1) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

の関係から、条件付き期待値が 0、条件付き分散が $2\sigma(t)^4$ となる。これを踏まえ、 \tilde{w} を $\mathcal{N}(0, 2\sigma(t)^4)$ に従う確率変数 $w(t)$ として近似すれば式 (9a) を得る。

付録 II 式 (22b) と式 (23) の導出過程

式 (22b) と式 (23) を得るには、MA 係数 θ が $u(t)$ に対して非線形となるために、線形化を行う必要がある。ここでは、Nakatsuma²⁴⁾を踏襲した線形化の手法を示す。任意の MA 係数 $\varepsilon(\theta^\dagger)$ を考えれば、 $\varepsilon(\theta^\dagger, t)$ は、

$$\varepsilon(\theta^\dagger, t) = y(\theta^\dagger, t) - \mathbf{x}(\theta^\dagger, t)\boldsymbol{\gamma}' \quad (\text{II.1a})$$

$$y(\theta^\dagger, t) = y(t) - \sum_{j=1}^p \phi_j y(t-j) - \sum_{j=1}^q \theta_j^\dagger y(\theta^\dagger, t-j) \quad (\text{II.1b})$$

$$\mathbf{x}(\theta^\dagger, t) = \mathbf{x}(t) - \sum_{j=1}^p \phi_j \mathbf{x}(t-j) - \sum_{j=1}^q \theta_j^\dagger \mathbf{x}^\dagger(\theta^\dagger, t-j) \quad (\text{II.1c})$$

として導出できる。そのうえで、誤差項 $\varepsilon(t)$ を θ^\dagger について第一項までテイラー展開すれば、

$$\varepsilon(\theta, t) \approx \varepsilon(\theta^\dagger, t) + \Psi(t) \cdot (\theta - \theta^\dagger)' \quad (\text{II.2})$$

を得る。また、

$$\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_q(t)] \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = -\varepsilon(\theta^\dagger, t-i) - \sum_{j=1}^q \theta_{t-j}^\dagger \psi_i(t-j) \\ (i = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

である。なお、 $t \leq 0$ のとき、 $\psi_i(t) = 0$ である。

θ^\dagger として、Nakatsuma²⁴⁾は Chib and Greenberg²⁶⁾の手法を改良し、

$$\theta^\dagger = \arg \min_{\theta} \sum_{j=1}^t \frac{\varepsilon(\theta, t)^2}{\sigma(t)^2} \quad (\text{II.5})$$

に従って採択する手法を提案した。ここで、近似尤度は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \exp \left[-\frac{\{\varepsilon(\theta^\dagger, t) + \Psi(t)(\theta - \theta^\dagger)'\}^2}{2\sigma(t)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

となる。このとき、

$$y^\theta(t) = \varepsilon(\theta^\dagger, t) - \Psi(t)\theta^{\dagger'} = \varepsilon^\theta(t) - \mathbf{x}^\theta(t)\boldsymbol{\theta}' \quad (\text{II.7})$$

とすれば、式 (22b) と式 (23) を得る。

参考文献

- 1) 小林潔司：分権的ライフサイクル費用評価と集計的効率性，土木学会論文集，No.793/IV-68，pp.59-71，2005.
- 2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.
- 3) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
- 4) 貝戸清之，保田敬一，小林潔司，大和田慶：平均費用法に基づいた橋梁部材の最適補修戦略，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.83-96，2005.

- 5) 安部和智, 天野耕一: 明石海峡大橋動態観測システム, 本四技報, Vol.22, No.86, pp.29-34, 1998.
- 6) 小林裕介, 三木千尋, 田辺篤史: リアルタイム全自動処理 Weight-in-Motion による長期交通荷重モニタリング, 土木学会論文集, No.773/I-69, pp.99-111, 2004.
- 7) 貝戸清之, 松岡弘大, 坂井康人, 川上順子, 荒川貴之, 金川昌弘, 小林潔司: アセットマネジメントへの適用を見据えた路車間無線通信モニタリング, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.13, pp.1017-1028, 2010.
- 8) Fritzen, C.P.: Vibration-Based Structural Health Monitoring – Concepts and Applications, *Key Engineering Materials*, Vol.3, No.20, pp.293-294, 2005.
- 9) Friswell, M. and Mottershead, J.: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1995.
- 10) Kiremidjian, A.: *Statistical Pattern Recognition*, Willy, West Sussex, United Kingdom, 2009.
- 11) Sohn, H., Fugate, M. and Farrar, C.: Damage Diagnosis using Statistical Process Control, *Paper prepared for Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, United Kingdom, 2000.
- 12) Fugate, M., Sohn, H. and Farrar, C.: Vibration-Based Damage Detection using Statistical Process Control, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.15, No.4, pp.707-721, 2001.
- 13) Nair, K. and Kiremidjian, A.: Time Series Based Structural Damage Detection Algorithm using Gaussian Mixture Modeling, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.291, pp.285-293, 2007.
- 14) Sohn, H., Farrar, C., Hemez, F. and Czarnecki, J.: A Review of Structural Health Monitoring Literature 1996-2001, *Journal of Structural Engineering*, Technical Report LA-UR-02-2095, Los Alamos National Laboratory, 2002.
- 15) Chu, C. Y. and Durango, C. P.: Estimation of Infrastructure Performance Models using State-Space Specifications of Time Series Models, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.15, No.1, pp.174-188, 2007.
- 16) Chu, C.Y. and Durango, C. P.: Estimation of Dynamic Performance Models for Transportation Infrastructure using Panel Data, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.1, pp.57-81, 2008.
- 17) Engle, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol.50, pp.987-1008, 1982.
- 18) Bollerslev, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307-327, 1986.
- 19) Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E.: Equations of State Calculations by Fast Computing Machines, *Journal of Chemical Physics*, Vol.21, pp.1087-1092, 1953.
- 20) Hastings, W.K.: Monte Carlo Sampling Methods using Markov Chains and their Applications, *Biometrika*, Vol.57, pp.97-109, 1970.
- 21) Kleibergen, F. and Van Dijk, H.K.: Non-Stationarity in GARCH Models: A Batesian Analysis, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.8, pp.S41-S61, 1993.
- 22) Engle, R.: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics, *Journal of Economic Perspectives*, Vol.15, No.4, pp.157-168, 2001.
- 23) 和合肇: ベイズ計量経済分析, 東洋経済出版社, 2005.
- 24) Nakatsuma, T.: Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach, *Journal of Econometrics*, Vol.95, pp.57-69, 2000.
- 25) 霍見浩喜, ラドチェンコ: アジア金融危機後の外国為替間の関係 (単位根, 共和分, VAR), ベイズ計量経済分析, pp.101-126, 2005.
- 26) Chib, S. and Greenberg, E.: Bayesian Inference in Regression Models with ARMA(p, q) Errors, *Journal of Econometrics*, Vol.64, pp.183-206, 1994.
- 27) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 28) Chib, S.: Marginal Likelihood from Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 29) Newey, W. K. and West, K. D.: A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Coisistent Covariance Matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 30) 水谷大二郎, 金川昌弘, 坂井康人, 貝戸清之, 小林潔司: ベンチマーク分析と重点監視部材の抽出, 第45回土木計画学研究・講演集, 土木学会, CD-ROM, No.353, 2012.
- 31) 古川愛子, 松尾卓弥, 西川晃司: スペクトル要素法を用いた高振動数起振による鋼トラス橋の損傷同定に関する研究, 土木学会論文集 A1, Vol.68, No.4 (地震工学論文集, Vol.31-b), pp.I523-I532, 2005.
- 32) Ibrahim, J. G., Chen, M. H. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer, 2001.

(2013. 8. 26 受付)

LONG-TERM DETERIORATION MODELING WITH TIME SERIES DATA

Kiyoshi KOBAYASHI, Kiyoyuki KAITO, Kodai MATSUOKA and Yasuhito SAKAI

With the purpose of streamlining and quantifying maintenance and management, the long-term monitoring with sensors is being put into practice. On the other hand, methodologies for detecting abnormalities and extracting the progress of deterioration based on monitoring data have not been developed. In this study, the authors propose a method for predicting deterioration based on the statistical characteristics of time-series data obtained through long-term monitoring. In detail, the fluctuation in the variance of the error term of the time-series model is expressed by the ARMAX-GARCH regression model, which is developed by the ARMA model with trend. Then, a methodology of estimating the timing of detailed inspection utilizing the ARMAX-GARCH model is developed. Lastly, this methodology is applied to the data of long-term monitoring targeted at the joint members of viaducts, to evaluate its effectiveness.