

社会基盤施設の多元的劣化過程モデル

水谷 大二郎¹・小濱 健吾²・貝戸 清之³・小林 潔司⁴

¹学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻・日本学術振興会特別研究員 DC (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail:d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学特任准教授 大学院工学研究科 NEXCO 西日本高速道路学共同研究講座 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-8)

E-mail:k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

⁴フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail:kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

社会基盤施設の劣化状態は、複数の劣化事象に着目して多元的に評価される。さらに、複数の劣化事象の間には相互作用が存在する可能性がある。本研究では、複数の劣化事象間の相関関係を考慮した社会基盤施設の多元的劣化過程モデルを提案する。具体的には、個別劣化事象の進展過程を異質性パラメータを導入した混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて記述する。さらに、個別劣化事象の劣化速度の異質性をガンマ分布により表現するとともに、劣化事象間の異質性相関構造をアルキメディアン・コピュラを用いて表現した多元的劣化過程モデルとそのベイズ推定の方法論を提案する。最後に、高速道路のジョイント部材に対する実点検データを用いた適用事例を通して本研究で提案する手法の有用性について考察する。

Key Words : *copula, multidimensional deterioration evaluation, mixed Markov hazard model*

1. はじめに

社会基盤施設に対して、多様な点検が日常的に実施され、各点検における膨大な点検データが蓄積されている。アセットマネジメントにおいては、これらの点検データを用いた統計的劣化予測に関する研究が蓄積された。なかでも、マルコフ劣化ハザードモデル²⁾の開発により、離散的健全度評価がなされた社会基盤施設の劣化予測精度が飛躍的に向上した。さらに、混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾の開発により、施設単位や部材単位、あるいは管理者側が実際の管理体制に応じて設定した評価単位(以下、構造物カテゴリー)ごとの劣化特性(異質性)の計量化が可能となった。また、階層ベイズ推定をもとにした混合マルコフ劣化ハザードモデルを推定するための方法論⁹⁾が提案され、経験的知見を事前分布として推定に組み込む手法が確立された。しかし、これらの方法論は単一の健全度指標を対象とした劣化予測にとどまっている。

社会基盤施設の健全度は、複数種類の評価指標を用いて記述される場合が多い。さらに、これらの個別評価指標は、それぞれ別の種類の点検業務により評価される。例えば、本研究の適用事例としてとりあげるジョイント部材の場合、路上点検では、ジョイントと後打ち材の段差、ゴムのはく離・き裂、フィンガーの段差、異常音などが詳細に点検される。一方、路下点検は橋脚天端からジョイントの状態を視認する定期的な目視

点検であるが、ジョイントそのものを視認できることは稀であり、異常音、漏水などに関する情報を獲得することができる。これら個別の目視点検は、それを実施するための費用や点検業務の複雑性に起因して、点検頻度や点検時点を統一することが困難である。しかしながら、社会基盤施設の健全度は、これら複数の評価指標を用いて総合的に評価することが必要である。

本研究では、個別の点検業務で獲得される断片的な評価情報に基づいて、複数の評価指標を用いて記述される劣化過程全体をモデル化する方法論を提案する。個々の評価指標で記述される構造物の劣化状態の間には相関関係が存在する。このような相関構造を利用することにより、断片的な個別評価結果を用いて、複数指標で記述される社会基盤施設の劣化過程全体を推定することが可能となる。具体的には、個別的な評価指標を用いた劣化過程を異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルにより表現するとともに、異質性パラメータの同時分布関数を表すコピュラを用いて複数指標間の相関構造を記述する。本研究で提案する方法論を用いることにより、1) 複数の劣化事象に関する劣化過程のベンチマーキングと劣化速度の相対評価、2) 複数の劣化事象の時間的進展を同時に考慮した多元的劣化過程モデルを開発する。さらに、これらの結果を用いることにより、社会基盤施設の多元的劣化予測や複数の劣化事象の特性を考慮した維持補修戦略の検討の

ために有用な情報を作成するための方法論を提案する。

以上の問題意識のもとに、本研究では個別評価指標に関する断片的な目視点検情報に基づいて、複数評価指標を用いて記述される劣化過程全体をモデル化する方法論を提案する。個別評価指標の劣化過程を混合マルコフ劣化ハザードモデル、複数評価指標の劣化速度間の相関構造をコピュラを用いて表現する。以下、2. で本研究の基本的な考え方を述べる。3. で多元的劣化予測モデルを提案し、4. でデータ構造の発生モデルを定式化し、5. でMCMCを用いた多元的劣化過程モデルの推定手法について詳述する。最後に、6. で高速道路ジョイント部材を対象に実証分析を行う。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 既往研究の概要

構造物の主な劣化予測手法として、力学的手法と統計的手法がある。これらの2種類の手法の特性や相違点は参考文献¹⁾に詳しい。本研究では、構造物に対する点検結果が離散的な健全度として評価され、さらにその健全度データが蓄積されている場合を対象に、1) 多様な構造物の多様な損傷を対象とした汎用的な方法論の開発、2) 複数の構造物で構成された路線や管理事務所単位での補修計画の立案を目的として統計的劣化予測手法を用いることとする。

代表的な統計的劣化予測モデルとしてマルコフ連鎖モデルがある。構造物の劣化状態が離散的な健全度として評価される場合、マルコフ連鎖モデルを用いて劣化過程をモデル化することができる。マルコフ劣化ハザードモデル(多段階指数ハザードモデル)²⁾の開発により、観測期間長が異なる点検データを用いてマルコフ推移確率を非集計的に推定することが可能になった。さらに、ハザード率に内包される特性変数では表現しきれない要因(不可観測要因)の影響を確率変数で表現したような混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾が提案されている。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、劣化速度を表す混合ハザード率が異質性パラメータと健全度別標準ハザード率を用いて、

混合ハザード率

= 異質性パラメータ×健全度別標準ハザード率 (1)

と表現される。混合マルコフ劣化ハザードモデルの開発により、任意の評価単位における劣化予測が可能となった。例えば、小濱等³⁾は橋梁の点検データを用いて、RC床版単位で期待寿命を求めている。さらに、混合マルコフ劣化ハザードモデルの混合ハザード率を用いて、各評価単位での期待寿命を相対評価し、重点監視部材を抽出する方法論³⁾や補修前後での異質性パラメータを比較することにより補修効果を定量化する手

法⁴⁾が開発されている。また、統計的劣化予測モデルの推定法として、ベイズ推定法が提案されている。ハザードモデルをベイズ推定する場合、一般的に、未知パラメータの事前分布と事後分布の間の共役性は成立しないため、事後確率密度関数を解析的に求めることができない。近年のMCMC法^{5),6)}の発展により、事後分布からのサンプリングが可能となり、ハザードモデルのベイズ推定が可能となった。津田等⁸⁾は劣化状態が故障の有無という2値状態で表されるような構造物や機器を対象としたワイブル劣化ハザードモデルを、貝戸・小林⁷⁾は前述のマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定する手法を提案している。さらに、混合マルコフ劣化ハザードモデルに関して、貝戸等⁹⁾はそのベイズ推定法を階層ベイズ推定法として定式化し、異質性の過分散問題の緩和方策を提示した。

上記の統計的劣化予測モデルは、いずれも社会基盤施設の劣化状態を単一の離散的健全度指標で評価することを想定している。しかし、構造物は多様な要因により劣化が進行する。劣化要因が異なれば、劣化の進展メカニズムも異なるために、単一の健全度指標のみでは劣化過程の異質性を十分に表現できないという限界がある。むしろ、構造物の劣化状態を複数の健全度指標を用いて評価の方が望ましい場合が少なくない。このような構造物の多元的劣化過程のモデル化に関しては、ほとんど研究が蓄積していないのが実情である。多元的劣化過程のモデル化に関しては、競合マルコフハザードモデル¹⁰⁾に関する研究事例がある。このモデルは、例えば縦ひび割れ、横ひび割れというように、極めて相関性の高い劣化事象の競合関係をモデル化することを目的とするものであり、任意の劣化事象による多元的劣化過程をモデル化できるような柔軟性をもっていない。これに対して、本研究では個別劣化事象の進行過程を異質性パラメータを導入した混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現するとともに、劣化事象間の相関構造を異質性パラメータの同時確率分布で表現する。このような単一評価指標の1次元異質性分布と相関構造を持つ異質性の同時分布をコピュラを用いて表現することにより、構造物の多元的劣化過程全体を多次元の混合マルコフ劣化ハザードモデルシステムで表現することが可能となる。筆者らが知る限り、コピュラを用いた多元的劣化予測モデルは他に研究事例が見当たらない。

(2) 構造物劣化速度の多元的評価

従来より、単一の健全度指標に基づいて構造物の劣化過程を表現する研究が蓄積されている。例えば、舗装の劣化過程に関しては、1) ひび割れ、わだち掘れ、平坦性という個別劣化事象をMCI指標という単一の評価

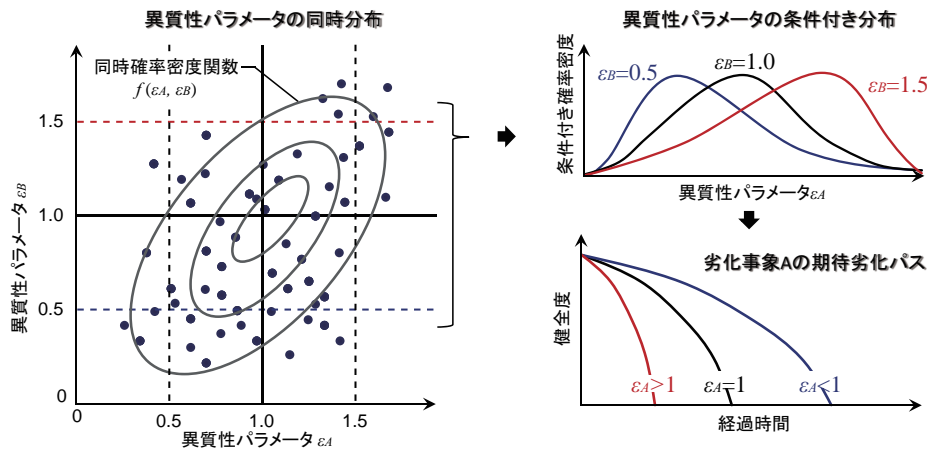


図-1 異質性パラメータの同時分布と劣化過程のベンチマーキング

指標に総合化するとともに、1元化された総合化指標の時間的変化をモデル化する方法、2) ひび割れ、わだち掘れ、平坦性という個別劣化事象のみに着目し、それぞれの劣化事象の経年的変化をモデル化する方法が採用されてきた。しかしながら、社会基盤施設の劣化過程には、多様な劣化要因が介在するために、1) 構造物によっては、ある単一の劣化事象が卓越する場合や、2) 複数の劣化事象が互いに相互作用を及ぼしながら劣化が進展する場合などがありうる。現実に観測される点検データには、このような複数の場合が混在する。このため、1つの健全度として総合化されたデータを用いた場合、その健全度がどの劣化事象の状況を表しているのかという情報は獲得できない。また、単一の劣化事象を用いた劣化過程モデルでは、社会基盤施設ごとによる劣化事象の異質性や、劣化事象間の相関性を表現できないという限界が存在する。

本研究で提案する多元的劣化過程モデルは、構造物の劣化状態を複数の健全度指標で表現する。その際、単一の劣化事象に関しても、構造物カテゴリーにより劣化メカニズムが多様に異なることに着目し、劣化速度の異質性を明示的に考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて、着目している劣化事象の進行過程を表現する。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、ベースラインモデルを用いて劣化過程のベンチマーキングモデルを表現し、構造物カテゴリーの異質性を、異質性パラメータ ε を用いた比例ハザードモデルで表現することになる。異質性パラメータ ε が確率密度関数 $f(\varepsilon)$ に従って分布する場合、異質性パラメータを用いて、ベンチマーキングケースに対して、個々の構造物カテゴリーの劣化速度を相対的に評価することが可能となる。すなわち、 $\varepsilon = 1$ の場合がベンチマーキングケースに該当すると考える。このとき、 $\varepsilon > 1$ のサンプルはベンチマーキングケースより相対的に劣化が早い構造物カテ

ゴリーとして、 $\varepsilon < 1$ の場合は劣化が遅いカテゴリーとして相対評価することが可能となる。

異質性パラメータ値は構造物カテゴリーごとの劣化特性の異質性だけでなく、複数の劣化事象の相互作用による劣化速度の異質性も表すことになる。したがって、社会基盤施設の劣化状態を複数の健全度指標で評価する場合、それぞれの劣化事象に関する劣化速度の異質性を表す異質性パラメータが互いに相関構造を持つ可能性が存在する。図-1は、複数の社会基盤施設の劣化状態を2種類の劣化事象A、Bを用いて評価する場合を想定している。図に示すように、各社会基盤施設の劣化速度の異質性を ε_A 、 ε_B という2種類の異質性パラメータで表現している。それぞれの構造物カテゴリーの劣化特性は、2次元空間上におけるポジショニングにより表現される。図-1の左図の縦軸、横軸にはそれぞれの劣化事象の異質性パラメータの値を表している。異質性パラメータの組 $(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ は、2次元空間において同時確率密度関数 $f(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ に従って分布していると考えられる。図-1の左図の各点は構造物カテゴリーごとの異質性パラメータの値を2次元空間上にプロットした結果である。同時確率密度関数 $f(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ を用いて、例えば、異質性パラメータ ε_B が既知である場合に、 ε_A が生起する条件付き確率密度を求めることができる。図-1のように、異質性パラメータ間に正の相関関係があるとき、劣化事象Bの異質性パラメータ ε_B が大きくなればなるほど、劣化事象Aの期待寿命も短くなるという、劣化事象の相互作用による複合的な劣化過程を同時確率密度関数 $f(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ を用いて表現することができる。

図-1に示すような異質性パラメータの空間的分布状態に関する情報を用いることにより、構造物の劣化特性を多元的に評価することが可能となる。同図のような同時分布の場合、例えば構造物の劣化特性を4つのグルー

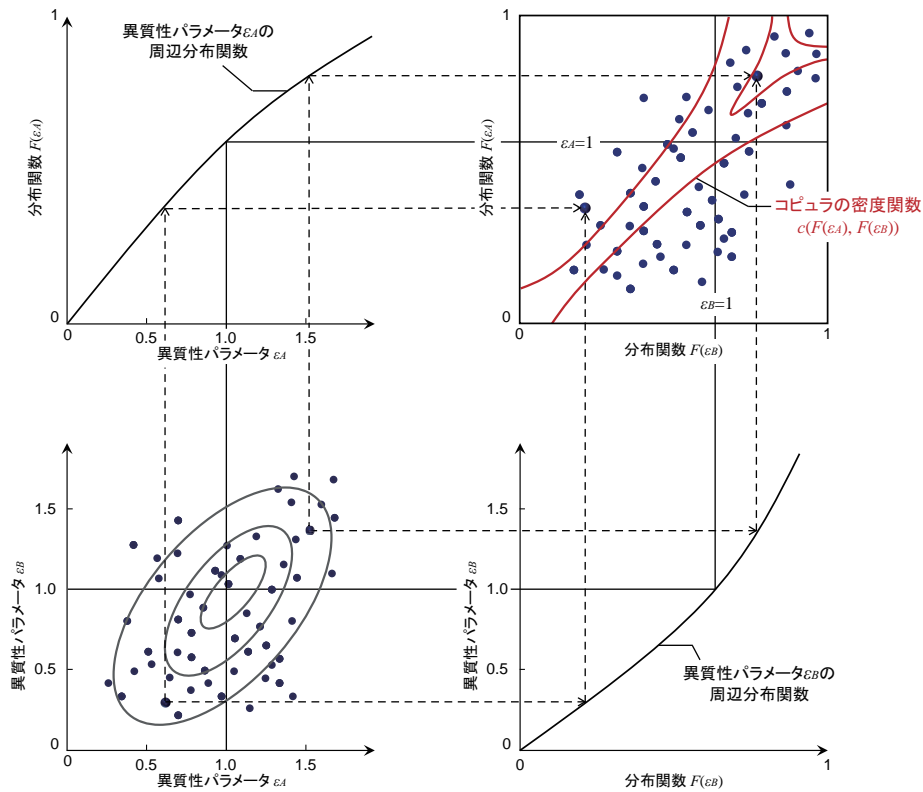


図-2 異質性パラメータの同時分布とコピュラ

に分類することができる。第1象限は、2つの劣化事象がともにベンチマーキングケース ($\epsilon_A = 1, \epsilon_B = 1$) より、劣化速度が相対的に早い場合を意味している。第2象限、第4象限は、それぞれ劣化事象 A, B の進行が卓越している場合を意味している。さらに、第3象限は、ベンチマーキングケースより劣化の進展が遅い構造物カテゴリー群を表していると評価することができる。2種類の異質性パラメータを図-1のように空間的分布として表現することにより、多元的な劣化事象を考慮して個々の構造物の劣化特性を俯瞰的に整理することができる。

(3) コピュラによる相関構造のモデル化

本研究では、多変量の周辺分布間の依存構造を表現するためにコピュラ¹¹⁾を用いる。コピュラは、複数の確率変数の周辺分布関数とそれらの同時分布関数を接合する関数であり、接合分布関数とも呼ばれる。コピュラは金融工学の分野での研究事例が豊富であり、例えば、戸坂・吉羽¹²⁾は、5種類のコピュラを例に、パラメータ推定法、乱数発生法、裾依存性などの議論を行い、貸出ポートフォリオの信用リスクと株式ポートフォリオの株価変動リスクを実証分析において算出している。土木計画学の分野においては、例えば桑野等¹³⁾が、自動車の保有時間と年間走行距離の相互依存性をコピュラにより表現し、自動車保有・利用行動の同時決定モ

デルの開発を行い、中国地方のアンケート調査データを用いた実証分析によりその有用性を示している。しかし、社会基盤施設の劣化予測モデルにコピュラを適用した事例は筆者らの知る限り存在しない。

多次元確率分布を直接推定する方法は、すでに数多く存在しており、そのためのソフトウェアも利用可能である。コピュラも観測結果に基づいて多次元確率分布を推定する方法であるが、多変量周辺分布の確率構造を維持しながら、同時分布関数を推定できる点に特徴がある。図-2は、コピュラ、異質性パラメータの周辺分布、図-1で示した異質性パラメータの同時分布の3者の関係を模式的に示している。異質性パラメータの同時分布は、周辺分布とコピュラに分解される。図-2では、周辺分布関数に従い分布する異質性パラメータの値を用いて、それぞれの劣化事象の劣化速度に関する相対評価を行うことができる。さらに、個別の劣化事象に関する劣化速度の相対評価結果を用いて、2次元空間上における相対評価を行うことが可能になる。このようにコピュラは周辺分布関数と同時分布関数を接合することを目的としており、個別指標による相対評価と多次元空間上の相対評価の整合性を確保しながら、異質性パラメータの相関構造を同時確率分布関数として推定することが可能になるという利点がある。さらに、4.で議論するように、社会基盤施設劣化事象に関

するデータは、それぞれ異なる目視点検方法により獲得できる場合が多い。さらに、目視点検方法により、点検頻度や点検時点が異なることも多い。このため、2つの劣化事象に関するデータを同時に獲得することが困難な場合が少なくない。本研究では、個々の劣化事象に関する劣化過程を混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現するとともに、個別劣化事象ごとに定義される異質性パラメータの確率分布をコピュラを用いて接合することにより多元的な劣化過程全体を表現する。このような方法を採用することにより、多元的劣化過程の部分的観測可能性を克服することが可能となる。筆者らの知る限り、このような相対評価の多元的整合性、多元的劣化事象の部分的観測可能性の問題に対して、多元的劣化過程全体をモデル化した研究事例は見当たらない。

3. 多元的劣化過程モデル

(1) モデル化の前提条件

カレンダー時刻 s_0 を初期時点 $t = 0$ とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots$ を考え、離散的時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。単位時間幅を1に基準化する。多元的な劣化事象 d ($d = 1, \dots, D$) のそれぞれに対して I_d 個の健全度 (以下、個別健全度と呼ぶ) i_d ($i_d = 1, \dots, I_d$) が定義される。 i_d の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。時点 t における劣化事象 d の個別健全度を状態変数 $h_d(t) = i_d$ ($i_d = 1, \dots, I_d; t = 0, 1, \dots$) を用いて表現する。劣化事象 d に関する劣化過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し、離散時間軸上における個別健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する。劣化事象 d の劣化過程を表す推移確率は、時点 t における個別健全度 $h_d(t) = i_d$ を与件とし、次の時点 $t+1$ における個別健全度 $h_d(t+1) = j_d$ ($j_d \geq i_d$) が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[h_d(t+1) = j_d | h_d(t) = i_d] = \pi_{i_d, j_d}^d \quad (2)$$

を用いて定義される。マルコフ推移確率 (式 (2)) は所与の2つの時点 $t, t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり、対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{i_d, j_d}^d = 0$ ($i_d > j_d$) が成立する。推移確率の定義より $\sum_{j_d=i_d}^{I_d} \pi_{i_d, j_d}^d = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して、

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{i_d, j_d}^d \geq 0 \quad (i_d, j_d = 1, \dots, I_d) \\ \pi_{i_d, j_d}^d = 0 \quad (i_d > j_d \text{ の時}) \\ \sum_{j_d=i_d}^{I_d} \pi_{i_d, j_d}^d = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

が成立する。健全度 I_d は、補修がない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{I_d, I_d}^d = 1$ が成立する。なお、マルコフ連鎖モデルでは、健全度が $i_d - 1$ から i_d

に推移した時点にかかわらず、時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみ依存するというマルコフ性を満足する¹⁴⁾。

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデル

いま、構造物カテゴリーごとに、劣化速度が異なるを考える。構造物カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) の構造物 l^k ($l^k = 1, \dots, L^k$) で発生する劣化事象 d ($d = 1, \dots, D$) の個別健全度 i_d ($i_d = 1, \dots, I_d - 1$) のハザード率を、個別ハザード率

$$\lambda_{i_d}^{l^k, d} = \tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d} \varepsilon_d^k \quad (4)$$

$$(i_d = 1, \dots, I_d - 1; l^k = 1, \dots, L^k;$$

$$k = 1, \dots, K; d = 1, \dots, D)$$

を用いて表す。ここに、 $\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d}$ は、構造物カテゴリー k の構造物 l^k が有する劣化事象 d の個別健全度 i_d の平均的なハザード率 (以下、標準ハザード率) である。異質性パラメータ ε_d^k は、構造物カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) における劣化事象 d の標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり、 $\varepsilon_d^k \geq 0$ が成立すると仮定する。異質性パラメータ ε_d^k の値が大きくなるほど、当該構造物カテゴリー k に含まれる全ての構造物の劣化事象 d の劣化速度が、標準ハザード率に対して大きいことを表す。式 (4) において、全ての健全度のハザード率に、同一の確率変数 ε_d^k が含まれる。このことは、ある健全度において劣化速度が大きい場合、他の健全度の劣化速度も相対的に大きくなることを意味する。

構造物カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) の劣化事象 d に関する異質性パラメータ ε_d^k の値を $\bar{\varepsilon}_d^k$ に固定する。構造物カテゴリー k のある任意の構造物に関して劣化事象 d の健全度 i_d の寿命が y 以上となる確率 $\tilde{G}_{i_d}^d(y|\bar{\varepsilon}_d^k)$ を、指数ハザード率 (式 (4)) を用いて

$$\tilde{G}_{i_d}^d(y|\bar{\varepsilon}_d^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d} \bar{\varepsilon}_d^k y) \quad (5)$$

と表わす。劣化事象 d に関して、構造物カテゴリー k のある構造物の第1回目の点検時刻 $\tau_{\alpha, d}^k$ で健全度が i_d と判定され、次の点検時刻 $\tau_{\beta, d}^k = \tau_{\alpha, d}^k + z_d^k$ においても健全度が i_d と判定される確率 $\pi_{i_d, i_d}^d(z_d^k|\bar{\varepsilon}_d^k)$ は、

$$\pi_{i_d, i_d}^d(z_d^k|\bar{\varepsilon}_d^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d} \bar{\varepsilon}_d^k z_d^k) \quad (6)$$

となる。また、点検時刻 $\tau_{\alpha, d}^k$ と $\tau_{\beta, d}^k = \tau_{\alpha, d}^k + z_d^k$ の間で健全度が i_d から j_d ($> i_d$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{i_d, j_d}^d(z_d^k|\bar{\varepsilon}_d^k)$ は、式 (4) より、

$$\begin{aligned} & \pi_{i_d, j_d}^d(z_d^k|\bar{\varepsilon}_d^k) \\ &= \sum_{c=i_d}^{j_d} \prod_{m=i_d, \neq c}^{j_d-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{l^k, d}}{\tilde{\lambda}_m^{l^k, d} - \tilde{\lambda}_c^{l^k, d}} \exp(-\tilde{\lambda}_c^{l^k, d} \bar{\varepsilon}_d^k z_d^k) \\ &= \sum_{c=i_d}^{j_d} \psi_{i_d, j_d}^{c, d}(\tilde{\lambda}^{l^k, d}) \exp(-\tilde{\lambda}_c^{l^k, d} \bar{\varepsilon}_d^k z_d^k) \end{aligned} \quad (7)$$

$(i_d = 1, \dots, I_d - 1; j_d = i_d + 1, \dots, I_d; k = 1, \dots, K)$ と表すことができる²⁾. ただし, $\tilde{\lambda}^{l^k, d} = (\tilde{\lambda}_1^{l^k, d}, \dots, \tilde{\lambda}_{I_d-1}^{l^k, d})$ である. また, $\psi_{i_d j_d}^{c, d}(\tilde{\lambda}^{l^k, d})$ は

$$\psi_{i_d j_d}^{c, d}(\tilde{\lambda}^{l^k, d}) = \prod_{m=i_d, \neq c}^{j_d-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_m^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} \quad (8)$$

となり, 標準ハザード率のみの関数で表される. ただし, 表記上の規則として,

$$\begin{cases} \prod_{m=i_d}^{j_d-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_m^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} = 1 & (i_d = c \text{ の時}) \\ \prod_{m=j_d}^{I_d-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_{m+1}^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} = 1 & (m = j_d \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える. さらに, 表記の便宜上,

$$\begin{aligned} & \prod_{m=i_d, \neq c}^{j_d-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_m^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} \\ &= \prod_{m=s}^{c-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_m^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} \prod_{m=c}^{j_d-1} \frac{\lambda_m^{l^k, d}}{\lambda_{m+1}^{l^k, d} - \lambda_c^{l^k, d}} \end{aligned}$$

と簡略化する. また, $\pi_{i_d I_d}^d(z_d^k | \varepsilon_d^k)$ に関しては,

$$\pi_{i_d I_d}^d(z_d^k | \varepsilon_d^k) = 1 - \sum_{j_d=i_d}^{I_d-1} \pi_{i_d j_d}^d(z_d^k | \varepsilon_d^k) \quad (9)$$

と表すことができる.

期間 $[\tau_{\alpha, d}^k, \tau_{\beta, d}^k]$ における構造物 l^k の劣化事象 d の劣化過程を個別ハザード率 $\lambda_{i_d}^{l^k, d} = \tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d} \varepsilon_d^k$ ($i_d = 1, \dots, I_d - 1$) を用いて表現する. 健全度 I_d はマルコフ連鎖の吸収状態であり, $\pi_{I_d I_d}^d = 1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_{I_d}^{l^k, d}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_{I_d}^{l^k, d} = 0$ となる. 構造物の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d}$ ($i_d = 1, \dots, I_d - 1; k = 1, \dots, K$) は構造物の特性ベクトル $\mathbf{x}_d^{l^k} = (x_{d,1}^{l^k}, \dots, x_{d,M}^{l^k})$ に依存すると考え, 標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d}$ を

$$\tilde{\lambda}_{i_d}^{l^k, d} = \exp(\mathbf{x}_d^{l^k} \boldsymbol{\beta}_{i_d}^{d'}) \quad (10)$$

と表す. ただし, $\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d = (\beta_{i_d,1}^d, \dots, \beta_{i_d,M}^d)$ は未知パラメータ $\beta_{i_d,m}^d$ ($m = 1, \dots, M$) による行ベクトル, 記号「 $'$ 」は転置操作を表す. また, $x_{d,1}^{l^k} = 1$ より, $\beta_{i_d,1}^d$ は定数項を表す.

(3) 多元的劣化事象の相関構造

D 種類の劣化事象の異質性パラメータ ε_d^k の同時確率分布をコピュラ C を用いて表す. コピュラの詳細は参考文献^{12), 11)}に譲るが, 読者の便宜を図るためにコピュラの概要を説明する. 周辺分布関数 F_1, \dots, F_D を持つ D 個の確率変数 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D$ の連続な同時分布関数を $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ とすると, スクラーの定理¹⁵⁾より,

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D) = C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \quad (11)$$

を満たすコピュラ C が一意に存在する. スクラーの定理から, コピュラ C に周辺分布 F_1, \dots, F_D を適用する

ことによって生成される $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ は, 周辺分布を区間 $[0, 1]$ とする同時分布関数である. また,

- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について, $C(u_1, \dots, u_{d-1}, 0, u_{d+1}, \dots, u_D) = 0$
- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について, $C(1, \dots, 1, u_d, 1, \dots, 1) = u_d$
- $u_d^1 \leq u_d^2$ を満たす全ての $(u_1^1, \dots, u_D^1), (u_1^2, \dots, u_D^2) \in [0, 1]^D$ に対して,

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_D=1}^2 (-1)^{\sum_{s=1}^D i_s} C(u_1^{i_1}, \dots, u_D^{i_D}) \geq 0$$

の3つの性質を全て満たすような関数 C がコピュラとして定義される¹¹⁾. このとき, 個々の劣化事象の異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_d = (\varepsilon_d^1, \dots, \varepsilon_d^K)$ の同時確率密度関数 $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ は, コピュラの分布関数 $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ あるいは確率密度関数 $c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ を用いて,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\partial^D C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))}{\partial F_1(\varepsilon_1) \dots \partial F_D(\varepsilon_D)} \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \\ &= c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \end{aligned} \quad (12)$$

と表現できる. なお, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ であり, 同時確率密度関数 (式 (12)) は, 構造物カテゴリーの違いに起因した異質性パラメータ $(\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_D^k)$ ($k = 1, \dots, K$) の同時分布における同時確率密度を示している. ここに, f_d は周辺分布関数 F_d の確率密度関数であり, ガンマ分布

$$f_d(\varepsilon_d) = \frac{(\phi_d)^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} (\varepsilon_d)^{\phi_d-1} \exp(-\phi_d \varepsilon_d) \quad (13)$$

を仮定する. なお, ガンマ分布 (式 (13)) は形状パラメータが ϕ_d , 尺度パラメータが $1/\phi_d$ であり, 平均 1 , 分散 $1/\phi_d$ をとる. このことにより, 個別ハザード率の期待値が標準ハザード率と一致する.

周辺分布に関する情報を用いて同時確率分布を表現するために様々なコピュラが提案されている. 本研究では, 金融工学の分野での使用実績が十分にあり, 乱数発生方法が知られているなど実務的にも扱いやすい, 1パラメータ・アルキメディアン・コピュラ¹²⁾を用いる. 周辺分布関数をそれぞれ $F_1(x_1) = u_1, \dots, F_d(x_d) = u_d, \dots, F_D(x_D) = u_D$ とする D 変量間の1パラメータ・アルキメディアン・コピュラの分布関数 $C(u_1, \dots, u_D)$ は, 生成関数 $\zeta(u_d)$ を用いて,

$$C(u_1, \dots, u_D) = \zeta^{-1} \left(\sum_{d=1}^D \zeta(u_d) \right) \quad (14)$$

と表現できる. アルキメディアン・コピュラにおいて,

$$C(1, \dots, 1, u_{d_1}, 1, \dots, 1, u_{d_2}, 1, \dots, 1) = C(u_{d_1}, u_{d_2}) \quad (15)$$

表-1 代表的なアルキメディアン・コピュラ

コピュラ	生成関数 $\zeta(u_d)$	分布関数 $C(u_1, \dots, u_D)$	確率密度関数 $c(u_1, \dots, u_D) = \frac{\partial^D C(u_1, \dots, u_D)}{\partial u_1 \dots \partial u_D}$
ガンベル $a \in (1, \infty)$	$(-\ln u_d)^a$	$\exp[-\{\sum_{d=1}^D (-\ln u_d)^a\}^{\frac{1}{a}}]$	一般形が存在しないため 分布関数を随時偏微分
クレイトン $a \in (0, \infty)$	$\frac{1}{a}(u_d^{-a} - 1)$	$(\sum_{d=1}^D u_d^{-a} - D + 1)^{-\frac{1}{a}}$	$\{\prod_{d=1}^{D-1} (1 + da)\}(\prod_{d=1}^D u_d^{-a-1})$ $(\sum_{d=1}^D u_d^{-a} - D + 1)^{-\frac{1}{a}-D}$
フランク $a \in (0, \infty)$	$\ln\{\exp(-au_d) - 1\}$ $-\ln\{\exp(-a) - 1\}$	$-\frac{1}{a} \ln \left[1 + \frac{\prod_{d=1}^D \{\exp(-au_d) - 1\}}{\{\exp(-a) - 1\}^D} \right]$	一般形が存在しないため 分布関数を随時偏微分

が成り立つ¹¹⁾。本研究の実証分析においては、アルキメディアン・コピュラとしてガンベル・コピュラ¹⁶⁾、クレイトン・コピュラ¹⁷⁾、フランク・コピュラ¹⁸⁾の3種類のコピュラをとりあげる。表-1にガンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラ、フランク・コピュラの生成関数、分布関数、確率密度関数を示している。ただし、ガンベル・コピュラ、フランク・コピュラの変数確率密度関数は一般的な形で表現することが困難であり、変数に応じて、随時、分布関数を偏微分することにより求める。また、ガンベル・コピュラのパラメータは $a \in (1, \infty)$ 、クレイトン・コピュラ、フランク・コピュラのパラメータは $a \in (0, \infty)$ を満たす。コピュラの選定方法として、Romano¹⁹⁾ は経験コピュラ²⁰⁾ との相違が最小となるコピュラを選定する方法を提案している。一方、Breymann等²¹⁾ は、パラメータ数の異なるコピュラ間での選定を考慮し、AIC (赤池情報量基準)²²⁾ をコピュラ選定基準としている。本研究では、コピュラを内包した混合マルコフ劣化ハザードモデル間でのモデル比較を行うため、後者のAICをコピュラ選定基準として採用した。

水などであるが、一部の点検項目が路上点検と重複している。路上点検は道路のリフレッシュ工事などの一斉通行止め期間や簡易規制による通行止めを利用して実施される。一方、路下点検は通行止めの必要がなく管理対象とするジョイント部材に対して網羅的に点検データを獲得することができる。このため、路上点検と路下点検の実施頻度は異なり、両者の実施タイミングを同期化することは不可能に近い。さらに、それぞれの点検業務で観測される劣化事象が異なっており、全ての劣化事象に関する情報を同一の時点で獲得することは極めて困難である。このような多元的劣化事象の部分的観測可能性に起因して、ジョイント毎の多元的劣化事象を1つの健全度として集約的に評価することは不可能である。しかし、各劣化事象の健全度評価の結果の間に相関関係が存在する。そこで、本研究では、異なる目視点検により得られる断片的な情報を用いて、多元的劣化過程全体を推計するような方法論を提案することとする。これにより、路上点検と路下点検データに存在する相関関係を明示的に扱うことが可能になれば、路下点検の結果に基づき、通行止めが必要となる路上点検箇所を絞り込むことができる。

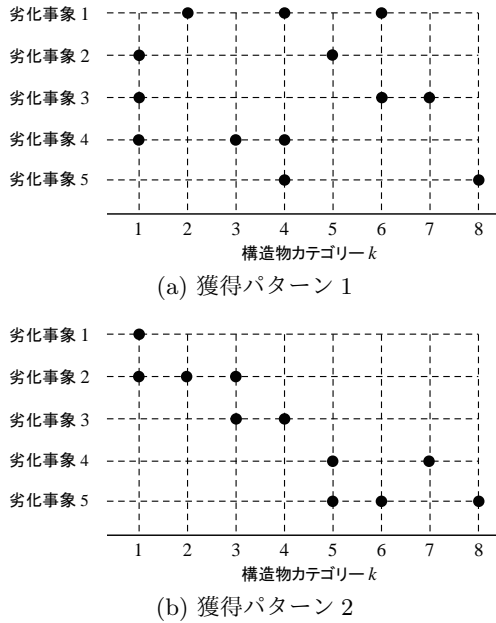
4. 複数タイプの点検と部分観測可能性

(1) 劣化事象の部分観測可能性

構造物の劣化状態がD種類の個別健全度指標を用いて評価されると考える。しかし、これらの個別健全度指標に関するデータが同一の点検業務で獲得できるとは限らない。また、構造物カテゴリーによっては、全ての劣化事象に関する点検データを獲得できない場合もありうる。本研究の実証分析の対象とするジョイント部材に着目すると、路上点検と路下点検という2種類の方法で劣化事象に関するデータを獲得できる。路上点検は車両の通行止めを伴う詳細な目視点検であり、点検項目は、ジョイントと後打ち材の段差、ゴムのはく離・亀裂、フィンガーの段差、異常音などである。一方、路下点検は橋脚天端からジョイントの状態を視認する定期的な目視点検である。点検項目は、異常音、漏

(2) データ構造

構造物の劣化状態をD種類の健全度指標を用いて評価する。構造物はK個のカテゴリーに分類され、各構造物カテゴリー $k(k=1, \dots, K)$ には L^k 個の構造物が含まれる。各構造物カテゴリーに含まれる構造物は、異質性パラメータ e_d^k を共有する。図-3に示すように、構造物カテゴリーにより、観測可能な劣化事象のタイプが異なる場合を考える。同図中の黒丸は、当該カテゴリーで当該劣化事象の点検が2回以上実施され、マルコフ劣化ハザードモデル推定のための健全度ペアサンプルが作成可能であることを意味する。コピュラの未知パラメータ推計に際し、構造物カテゴリーにおけるデータの同時観測可能性が重要となる。図-3に示すように、8個の構造物カテゴリー $k=1, \dots, 8$ と5個の劣化事象 $d=1, \dots, 5$ を考える。例えば、図-3(a)では、


 図-3 ある構造物カテゴリー k のデータ獲得例

構造物カテゴリー 1 で劣化事象 2, 3, 4 の, 構造物カテゴリー 4 で劣化事象 1, 4, 5 の健全度ペアサンプルがそれぞれ観測されている。このとき, 構造物カテゴリー 1 と 4 でそれぞれ部分的な劣化事象に対し観測された点検データを用いることにより, 劣化事象 4 を介して劣化事象 1, ..., 5 までの全ての劣化事象同士の相関構造をコピュラを用いて推計できる。この場合, 劣化事象は連結可能性条件を満足していると呼ぶ。一方, 図-3(b) では, 劣化事象グループ 1 (劣化事象 1,2,3) と劣化事象グループ 2 (劣化事象 4,5) が同時に観測されたような構造物カテゴリーが存在しない。コピュラは異質性パラメータの同時生起分布を表現するものであり, コピュラの推計バイアスを抑止するためには観測データが連結可能性条件を満足することが望ましい。

本研究では, 各構造物カテゴリーに対して劣化事象間の相関関係をコピュラにより表現する。その際, 図-3(a) のように全ての劣化事象が連結可能であることを仮定する。いま, 構造物カテゴリー単位に観測される劣化事象グループ $\omega^k (k = 1, 2, \dots, K)$ を設定する。例えば, 図-3(a) では, 構造物カテゴリー 1 では劣化事象 2, 3, 4 が観測でき, 劣化事象グループは $\omega^1 = \{2, 3, 4\}$ と表される。構造物カテゴリー 2 では, 劣化事象 1 のみが観測されるため, 劣化事象グループは $\omega^2 = \{1\}$ と表現できる。ここで, 任意の劣化事象 $d, d' (d, d' = 1, \dots, D)$ に関して, ダミー変数 $\iota_{d,d'}$ を

$$\iota_{d,d'} = \begin{cases} 1 & d, d' \in \omega^k \text{となる } k \text{ が存在する} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases} \quad (16)$$

と定義する。ダミー変数 $\iota_{d,d'}$ を (d, d') 要素とする $D \times D$

行列 \mathbf{H} に対して

$$\times_D \mathbf{H} = \mathbf{1} \quad (17)$$

が成立すると考える。ただし, 記号 \times_D はブール演算により行列 \mathbf{H} を D 回乗ずる演算を表す。 $\mathbf{1}$ は全ての要素を 1 とする $D \times D$ 次元の行列である。条件 (式 (17)) を構造物カテゴリー内での連結可能性条件と呼ぶ。

(3) 部分観測結果と同時確率密度関数

本研究では, 各構造物カテゴリーに対して劣化事象間の相関関係をコピュラにより表現する。さらに, 図-3(a) に示したように劣化事象は互いに連結可能であるが, 各構造物カテゴリーでは必ずしも全ての劣化事象に関する点検データが獲得されていないような場合を想定する。構造物カテゴリー k に対して観測可能な劣化事象の集合 ω^k に基づいて, 構造物カテゴリーと各劣化事象の関係を表すダミー変数 ν_d^k を

$$\nu_d^k = \begin{cases} 1 & d \in \omega^k \\ 0 & d \notin \omega^k \end{cases} \quad (18)$$

と定義する。さらに, 構造物カテゴリー k で観測可能な劣化事象に対応する異質性パラメータベクトルを $\hat{\epsilon}^k = \{F_1(\epsilon_1^k)^{\nu_1^k}, \dots, F_D(\epsilon_D^k)^{\nu_D^k}\}$ と表す。 $\nu_d^k = 0$ の場合, $F_d(\epsilon_d^k)^{\nu_d^k} = 1$ となる。このとき, 部分異質性パラメータベクトル $\hat{\epsilon}^k$ の周辺分布間の相関関係を表現するコピュラの分布関数 $\tilde{C}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k))$ を

$$\tilde{C}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k)) = C(F_1(\epsilon_1^k)^{\nu_1^k}, \dots, F_D(\epsilon_D^k)^{\nu_D^k}) \quad (19)$$

と定義する。1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラの性質 (式 (15)) より, 式 (19) は劣化事象集合 ω^k 内の劣化事象のみに着目した異質性パラメータに関するコピュラの部分分布関数を表している。ここで, 式 (19) において, 構造物カテゴリー k において観測可能な劣化事象の集合 ω^k に属する R^k 個の劣化事象をそれぞれ $\hat{d}_{r,k}^k (r = 1, \dots, R^k)$ と表記する。この時, カテゴリー k に対するコピュラの確率密度関数 $\tilde{c}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k))$ は,

$$\tilde{c}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k)) = \frac{\partial^{R^k} \tilde{C}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k))}{\partial \hat{F}_{\hat{d}_1^k}(\epsilon_{\hat{d}_1^k}^k) \cdots \partial \hat{F}_{\hat{d}_{R^k}^k}(\epsilon_{\hat{d}_{R^k}^k}^k)} \quad (20)$$

と表現することができる。構造物カテゴリー k の異質性パラメータベクトル $\hat{\epsilon}^k$ の同時確率密度関数 $\hat{f}^k(\hat{\epsilon}^k)$ は, コピュラの確率密度関数 $\tilde{c}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k))$, 周辺確率密度関数 $f_d(\epsilon_d^k)$, ダミー変数 ν_d^k を用いて,

$$\hat{f}^k(\hat{\epsilon}^k) = \tilde{c}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\epsilon}^k)) \cdot \prod_{d=1}^D \{f_d(\epsilon_d^k)\}^{\nu_d^k} \quad (21)$$

と表現できる。同時確率密度関数 (式 (21)) を用いることにより, ある構造物カテゴリー k において, ある劣化事象 d' に関する観測データが存在しない場合でも, 残りの劣化事象 d に関する点検データが獲得されてい

る場合には、その点検データを用いて異質性パラメータの周辺分布の推定に用いることが可能となる。

(4) 尤度関数

いま、構造物カテゴリー k の構造物 l^k ($l^k = 1, \dots, L^k$) に対して、それぞれの劣化事象に関する複数の目視点検結果が得られていると考える。構造物カテゴリー k の劣化事象 d に関する離散時間軸上の隣接する目視点検時点 $(\tau_{\alpha,d}^k, \tau_{\beta,d}^k)$ と表す。ただし、 $\tau_{\alpha,d}^k$ は先行する目視点検時点であり、 $\tau_{\beta,d}^k$ は後続の目視点検時点を表す。 z_d^k は隣接する2つの時点の期間長である。2つの時点で観測された構造物の健全度を $\bar{h}_d^k(\tau_{\alpha,d}^k)$, $\bar{h}_d^k(\tau_{\beta,d}^k)$ と表す。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は、実測値を意味する。点検時点における健全度に基づいて、ダミー変数 $\delta_{i_d j_d}^{l^k, d}$ ($i_d = 1, \dots, I_d - 1, j_d = i_d, \dots, I_d; k = 1, \dots, K; l^k = 1, \dots, L^k$) を

$$\delta_{i_d j_d}^{l^k, d} = \begin{cases} 1 & \bar{h}_d^k(\tau_{\alpha,d}^k) = i_d, \bar{h}_d^k(\tau_{\beta,d}^k) = j_d \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (22)$$

と定義する。さらに、ダミー変数ベクトルを $\delta_d^{l^k} = (\delta_{11}^{l^k, d}, \dots, \delta_{I_d-1, I_d}^{l^k, d})$ 、構造物 l^k に関わる劣化事象 d の劣化速度に影響を及ぼす特性ベクトルを $\bar{x}_d^{l^k} = (\bar{x}_{d,1}^{l^k}, \dots, \bar{x}_{d,M}^{l^k})$ と表す。また、第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり、恒等的に $x_{d,1}^{l^k} = 1$ である。構造物カテゴリー k に属する構造物 l^k の点検データ d の点検サンプルが有する情報を $\xi_d^{l^k} = (\delta_d^{l^k}, z_d^k, \bar{x}_d^{l^k})$ 、目視点検データ全体を Ξ と表す。

いま、目視点検データ $\xi^{l^k} = \{\xi_d^{l^k} : d \in \omega^k\}$ を与件とする。この時、目視点検データが観察できる尤度は、マルコフ推移確率と異質性パラメータの同時確率密度関数を用いて、

$$\mathcal{L}(\theta | \xi^{l^k}) = \tilde{c}(\hat{F}^k(\hat{\varepsilon}^k)) \prod_{d=1}^D \left\{ \pi_d^k(\xi^{l^k} | \beta^d, \varepsilon_d^k) f_d(\varepsilon_d^k) \right\}^{\nu_d^k} \quad (23)$$

と表現できる。ただし、 $\theta = (\beta, \phi, a)$ はパラメータベクトルを表し、 $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^D)$, $\beta^d = (\beta_{1^d}^d, \dots, \beta_{I_d-1^d}^d)$ である。ここに、

$$\begin{aligned} & \pi_d^k(\xi^{l^k} | \beta^d, \varepsilon_d^k) \\ &= \prod_{i_d=1}^{I_d-1} \prod_{j_d=i_d}^{I_d} \left\{ \pi_{i_d j_d}^k(\bar{z}_d^k, \bar{x}_d^{l^k} | \beta^d, \varepsilon_d^k) \right\}^{\delta_{i_d j_d}^{l^k, d}} \\ &= \prod_{i_d=1}^{I_d-1} \prod_{j_d=i_d}^{I_d} \left\{ \sum_{m=i_d}^{j_d} \psi_{i_d j_d}^m(\tilde{\lambda}^{l^k, d}) \right. \\ & \quad \left. \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l^k, d} \varepsilon_d^k z_d^k) \right\}^{\delta_{i_d j_d}^{l^k, d}} \end{aligned} \quad (24)$$

である。ただし、 $\tilde{\lambda}^{l^k, d} = (\tilde{\lambda}_1^{l^k, d}, \dots, \tilde{\lambda}_{I_d-1}^{l^k, d})$ は標準ハザード率を要素とするベクトルである。この時、観測値データ集合 Ξ が観測される尤度 $\mathcal{L}(\theta | \Xi)$ は、

$$\mathcal{L}(\theta | \Xi)$$

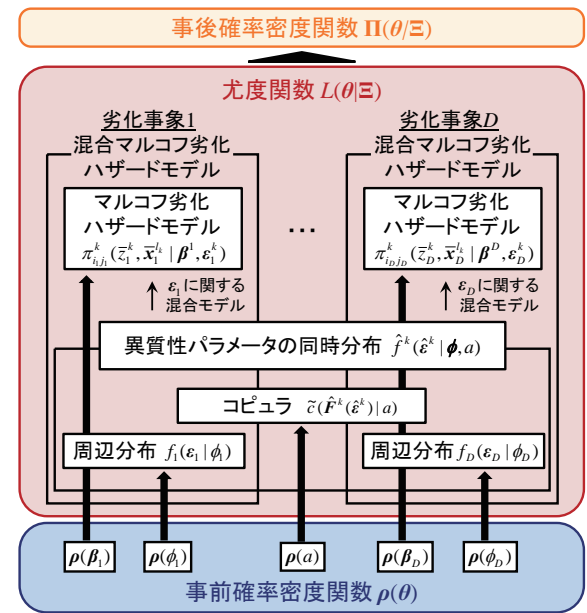


図-4 多元的劣化過程モデルの階層ベイズ推計

$$= \prod_{k=1}^K \prod_{l^k=1}^{L^k} \left[\tilde{c}(\hat{F}^k(\hat{\varepsilon}^k)) \prod_{d=1}^D \left\{ \pi_d^k(\xi^{l^k} | \beta^d, \varepsilon_d^k) f_d(\varepsilon_d^k) \right\}^{\nu_d^k} \right] \quad (25)$$

と表現できる。

5. 推計手法

(1) コピュラと階層ベイズモデル

本研究では、 D 種類の劣化事象それぞれに対して混合マルコフ劣化ハザードモデルを定式化するとともに、コピュラを用いて劣化速度間の相関性を表現したような多元的劣化モデルを定式化した。その際、構造物カテゴリー k の劣化事象 d に関する異質性パラメータ ε_d^k は同時分布 (式 (12)) から抽出された標本であると考えられる。異質性パラメータの周辺分布をガンマ分布 (式 (13)) を用いて定式化する。異質性パラメータの周辺分布のパラメータ ϕ_d も未知パラメータである。パラメータ ϕ_d をハイパーパラメータとして異質性パラメータの分布関数に組み込み、 ϕ_d に関しても事前分布を設定する。このように、事前分布を階層化したようなモデルは階層ベイズモデルと総称され、主にマーケティング分析などの分野で研究が進められている²³⁾。さらに、本研究では、コピュラのパラメータ a の推計も階層ベイズ推計モデルに組み込まれることになる。図-4に、多元的劣化過程モデルの推計フローを示している。ベイズ推計理論では、5.(2)で述べるように、未知パラメータの事前確率密度関数と尤度関数の積が未知パラメータの事後確率密度関数に比例するという性質を利用する。多元的劣化過程モデルにおいて、異質性パラメータ

タの同時分布は、コピュラと周辺分布により表され、さらに、コピュラのパラメータと周辺分布のパラメータに関するもそれぞれ事前確率密度関数が設定されている。このように、多元的劣化過程モデルは複数の階層構造を持った複雑なモデル構造を有しており、最尤推定法を用いて多元的劣化過程モデルを推計することは困難である。本研究では、ベイズ推計法を用いて多元的劣化過程モデルに含まれる全ての未知パラメータを同時に推計する方法を提案する。

(2) 事前確率密度関数の設定

一般的なベイズ推計手法では、パラメータの事前分布と、観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推計する。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ と表す。ここで、パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が確率変数で、事前確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\theta})$ に従うと仮定する。目視点検データ Ξ が与件であるときに、未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の同時事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ はベイズの定理より、

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi) = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi)\rho(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi)\rho(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \quad (26)$$

と表すことができる。ただし、 Θ はパラメータ空間である。このとき、式 (26) の分母は基準化定数であることから、同時事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ は

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi)\rho(\boldsymbol{\theta}) \quad (27)$$

と表される。事前確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\theta})$ を、

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{\theta}) &= \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, a) \\ &= \prod_{d=1}^D \prod_{i_d=1}^{I_d-1} \rho_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d) \prod_{d=1}^D \rho_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}_d) \rho_a(a) \end{aligned} \quad (28)$$

と展開する。式 (28) のように、多元的劣化過程モデルの事前確率密度関数は、マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d$ の事前確率密度関数 $\rho_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d)$ 、異質性パラメータの分散を規定するパラメータ $\boldsymbol{\phi}_d$ の事前確率密度関数 $\rho_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}_d)$ 、コピュラの未知パラメータ a の事前確率密度関数 $\rho_a(a)$ で構成される。

まず、事前確率密度関数 $\rho_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d)$ として多次元正規分布 $\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d \sim \mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_{i_d}^d, \boldsymbol{\Sigma}_{i_d}^d)$ を用いる。ただし、 $\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_{i_d}^d, \boldsymbol{\Sigma}_{i_d}^d)$ は期待値ベクトルを $\boldsymbol{\mu}_{i_d}^d$ 、分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}_{i_d}^d$ とした M 次元正規分布である。異質性パラメータの周辺分布として設定したガンマ分布のハイパーパラメータ $\boldsymbol{\phi}_d$ の事前確率密度関数 $\rho_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}_d)$ としてガンマ分布 $\mathcal{G}(\alpha_d^0, \gamma_d^0)$ を用いる。次に、コピュラの未知パラメータ a の事前確率密度関数を設定する。表-1 に示したように、コピュラの種類によりパラメータ a の定義域が異なるため、コピュラ毎に具体的な事前分布を設定する必要がある。本研究では、 $a \in (0, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラ、フランク・コピュラについて、

a の事前分布としてガンマ分布 $\mathcal{G}(\alpha_c^0, \gamma_c^0)$ を設定する。 $a \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラに関しては $u = a - 1$ と変数変換し、 $u \sim \mathcal{G}(\alpha_c^0, \gamma_c^0)$ とする。ただし、これらの事前確率密度関数が推計結果に与える影響は、点検データの増加に伴い薄れていく。階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法（以下、MH 法）を組み合わせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている⁵⁾。

(3) 同時事後確率密度関数の定式化

ひとまず、パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, a)$ を与件とする。このとき、全目視点検データ Ξ の同時生起確率密度関数（尤度関数）は、マルコフ推移確率（式 (6), (7), (9)）と連結可能性条件を考慮した異質性パラメータの同時分布（式 (21)）を用いて式 (23) のように定式化できる。また、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事前確率密度関数は式 (28) で表現される。ベイズの定理（式 (27)）より、尤度関数（式 (23)）と事前確率密度関数（式 (28)）を用いて同時事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ を定式化する。

本研究で取り扱う 3 種類のコピュラでは、パラメータの定義域が異なるため、コピュラの種類毎に具体的な事後確率密度関数を定式化する。まず、パラメータに $a \in (0, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラ、フランク・コピュラを用いたときの同時事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ は、

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi) &\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi) \prod_{d=1}^D \prod_{i_d=1}^{I_d-1} \rho_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d) \prod_{d=1}^D \rho_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}_d) \rho_a(a) \\ &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{l^k=1}^{L^k} \left[\tilde{c}(\hat{\boldsymbol{F}}^k(\boldsymbol{\varepsilon}^k)) \prod_{d=1}^D \left\{ \pi_d^k(\boldsymbol{\xi}^{l^k} | \boldsymbol{\beta}^d, \boldsymbol{\varepsilon}_d^k) f_d(\boldsymbol{\varepsilon}_d^k) \right\}^{\nu_d^k} \right] \\ &\quad \cdot \prod_{d=1}^D \prod_{i_d=1}^{I_d-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d - \boldsymbol{\mu}_{i_d}^d) (\boldsymbol{\Sigma}_{i_d}^d)^{-1} (\boldsymbol{\beta}_{i_d}^d - \boldsymbol{\mu}_{i_d}^d)' \right\} \\ &\quad \cdot \prod_{d=1}^D \frac{(\boldsymbol{\phi}_d)^{\alpha_d^0 - 1}}{(\gamma_d^0)^{\alpha_d^0} \Gamma(\alpha_d^0)} \exp \left(-\frac{\boldsymbol{\phi}_d}{\gamma_d^0} \right) \\ &\quad \cdot \frac{a^{\alpha_c^0 - 1}}{(\gamma_c^0)^{\alpha_c^0} \Gamma(\alpha_c^0)} \exp \left(-\frac{a}{\gamma_c^0} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

と定式化することができる。パラメータに $a \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラを用いたときの同時事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ は、式 (29) において $\rho_a(a)$ を

$$\rho_a(a) = \frac{(a-1)^{\alpha_c^0 - 1}}{(\gamma_c^0)^{\alpha_c^0} \Gamma(\alpha_c^0)} \exp \left(-\frac{a-1}{\gamma_c^0} \right) \quad (30)$$

と置換すればいい。

(4) 同時事後確率密度関数の推計

多元的劣化過程モデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を導出する。未知パラメータベクトル β から $\beta_{e_2}^{e_1}$ ($e_1 = 1, \dots, D; e_2 = 1, \dots, I_{e_1} - 1$) を除いた未知パラメータベクトルを β^{-e_1, e_2} と表すこととする。同様に異質性パラメータベクトル ε から $\varepsilon_{e_1}^{e_3}$ ($e_1 = 1, \dots, D; e_3 = 1, \dots, K$) を除いたベクトルを ε^{-e_1, e_3} と、ベクトル ϕ から ϕ_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, D$) を除いたベクトルを ϕ^{-e_1} と表す。また、式 (29) より、 β^{-e_1, e_2} , ϕ , ε , a を既知とした時の $\beta_{e_2}^{e_1}$ の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\beta_{e_2}^{e_1} | \beta^{-e_1, e_2}, \varepsilon, \phi, a, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\beta_{e_2}^{e_1} | \beta^{-e_1, e_2}, \varepsilon, \phi, a, \Xi) \\ & \propto \prod_{i_{e_1}=1}^{e_2} \prod_{j_{e_1}=e_2}^{I_{e_1}} \prod_{k=1}^K \prod_{l=1}^{L^k} \left\{ \tilde{\lambda}_{e_2}^{l^k, e_1} (\delta_{i_{e_1} j_{e_1}}^{l^k, e_1} - \delta_{i_{e_1} e_2}^{l^k, e_1}) \sum_{m=i_{e_1}}^{j_{e_1}} \right. \\ & \quad \left. \prod_{q=i_{e_1}, q \neq m}^{m-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_q^{l^k, e_1} - \tilde{\lambda}_m^{l^k, e_1}} \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l^k, e_1} \varepsilon_{e_1}^k \bar{z}_{e_1}^k) \right\} \delta_{i_{e_1} j_{e_1}}^{l^k, e_1} \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta_{e_2}^{e_1} - \mu_{e_2}^{e_1}) (\Sigma_{e_2}^{e_1})^{-1} (\beta_{e_2}^{e_1} - \mu_{e_2}^{e_1})' \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $\delta_{i_{e_1} j_{e_1}}^{l^k, e_1}$ は、点検データ e_1 の点検サンプル l^k の事前健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l^k}) = i_{e_1}$ とサンプリングする際の事前健全度 e_2 が一致した場合に 1 を、そうでない場合に 0 をとるダミー変数である。また、 β , ϕ , ε^{-e_1, e_3} , a を既知とした時の $\varepsilon_{e_1}^{e_3}$ の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\varepsilon_{e_1}^{e_3} | \beta, \varepsilon^{-e_1, e_3}, \phi, a, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\varepsilon_{e_1}^{e_3} | \beta, \varepsilon^{-e_1, e_3}, \phi, a, \Xi) \\ & \propto \prod_{l_{e_3}=1}^{L_{e_3}} \left[\tilde{c}(\hat{F}^{e_3}(\hat{\varepsilon}^{e_3})) \left\{ \pi_{e_1}^{e_3} (\xi^{l_{e_3}} | \varepsilon_{e_1}^{e_3}) f_{e_1}(\varepsilon_{e_1}^{e_3}) \right\} \nu_{e_1}^{e_3} \right] \\ & \cdot \prod_{k=1, k \neq e_3}^K \left[\left\{ \tilde{c}(\hat{F}^k(\hat{\varepsilon}^k)) \right\} \nu_{e_1}^{e_3} \right]^{L^k} \quad (32) \end{aligned}$$

と表せる。また、 β , ε , ϕ^{-e_1} , a を既知とした時の ϕ_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\phi_{e_1} | \beta, \varepsilon, \phi^{-e_1}, a, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\phi_{e_1} | \beta, \varepsilon, \phi^{-e_1}, a, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left[\tilde{c}(\hat{F}^k(\hat{\varepsilon}^k)) \left\{ f_{e_1}(\varepsilon_{e_1}^k) \right\} \nu_{e_1}^k \right]^{L^k} \\ & \cdot (\phi_{e_1})^{\alpha_{e_1}^0 - 1} \exp \left(-\frac{\phi_{e_1}}{\gamma_{e_1}^0} \right) \quad (33) \end{aligned}$$

と表すことができる。さらに、コピュラのパラメータ a に関して、 β , ε , ϕ を既知としたときの a の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(a | \beta, \varepsilon, \phi, \Xi)$ を定式化する。まず、クレイトン・コピュラ、ガンベル・コピュラ ($a \in (0, \infty)$) を用いたとき、

$$\Pi(a | \beta, \varepsilon, \phi, \Xi)$$

$$\propto \prod_{k=1}^K \left\{ \tilde{c}(\hat{F}^k(\varepsilon^k)) \right\}^{L^k} a^{\alpha_c^0 - 1} \exp \left(-\frac{a}{\gamma_c^0} \right) \quad (34)$$

と表すことができる。また、フランク・コピュラ ($a \in (1, \infty)$) を用いたとき、

$$\begin{aligned} & \Pi(a | \beta, \varepsilon, \phi, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \tilde{c}(\hat{F}^k(\varepsilon^k)) \right\}^{L^k} (a-1)^{\alpha_c^0 - 1} \exp \left(-\frac{a-1}{\gamma_c^0} \right) \quad (35) \end{aligned}$$

と表すことができる。

条件付き事後確率密度関数 (式 (31)-(35)) を用いた具体的な推計手順を図-5 に示している。推計手順は以下のステップで構成される。

ステップ 1 先験的情報を用いて事前分布のパラメータ値 μ_{i_d} ($d = 1, \dots, D; i_d = 1, \dots, I_d$), Σ_{i_d} ($d = 1, \dots, D; i_d = 1, \dots, I_d$), α_d^0 ($d = 1, \dots, D$), γ_d^0 ($d = 1, \dots, D$), α_c^0 , γ_c^0 を設定する。また、未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, a)$ の初期値 $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, \phi^{(0)}, a^{(0)})$, 異質性パラメータの初期値 $\varepsilon^{(0)}$ を設定する。初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく。 $n = 1$ に設定する。サンプリング回数 \bar{n} , \bar{n} を設定する。 $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 1$ に設定する。

ステップ 2 未知パラメータ値 $\theta^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \bar{n}$), 異質性パラメータ値 $\varepsilon^{(n)}$ を以下の手順でサンプリングする。

ステップ 2-1 未知パラメータベクトル $\beta_{e_2}^{e_1, (n)}$ ($e_2 = 1, \dots, I_{e_1} - 1$) を条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\beta_{e_2}^{e_1, (n)} | \beta^{-e_1, e_2, (n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \phi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \Xi^{(n-1)})$ からランダムサンプリングする。

ステップ 2-2 異質性パラメータ $\varepsilon_{e_1}^{e_3, (n)}$ ($e_3 = 1, \dots, K$) を $\Pi(\varepsilon_{e_1}^{e_3, (n)} | \beta^{(n)}, \varepsilon^{-e_1, -e_3, (n-1)}, \phi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。

ステップ 2-3 未知パラメータ $\phi_{e_1}^{(n)}$ ($e_1 = 1, \dots, D$) を $\Pi(\phi_{e_1}^{(n)} | \beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \phi^{-e_1, (n-1)}, a^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。 $e_1 = D$ の場合、ステップ 2-4 へ進む。そうでない場合、 $e_1 = e_1 + 1$ とし、ステップ 2-1 に戻る。

ステップ 2-4 コピュラの未知パラメータ $a^{(n)}$ を $\Pi(a^{(n)} | \beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \phi^{(n)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。

ステップ 3 十分大きな \bar{n} に対して $n > \bar{n}$ ならば $\theta^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ を記録する。

ステップ 4 $n = \bar{n}$ ならば計算を終了する。 $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ としステップ 2-1-1 へ戻る。

ステップ1 初期値設定
 - 未知パラメータ: $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, \phi^{(0)}, a^{(0)})$
 - 異質性パラメータ: $\varepsilon^{(0)}$
 - 事前分布のパラメータ: $\mu_{ij}^d, \Sigma_{ij}^d, \alpha_c^0, \gamma_c^0, \alpha_d^0, \gamma_d^0$
 - サンプル回数: n, \bar{n}
 - $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1$

表-2 健全度判定基準²⁴⁾

健全度	損傷状態
1	下記以外の状態
2	損傷の状態を観察する必要がある場合
3	機能低下があり、対策の必要がある場合
4	機能低下が著しく、道路構造物の安全性から緊急に対策の必要がある場合

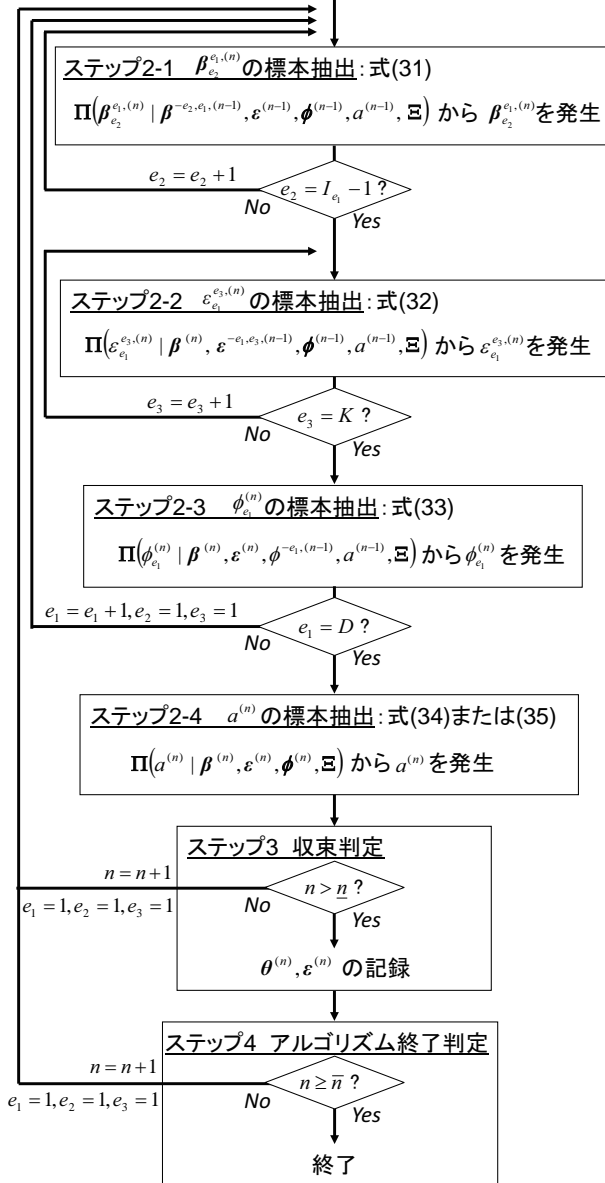


図-5 推計アルゴリズム

十分大きな n に対して、このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば、ギブスサンプリングによる $\theta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}$ ($n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n}$) のサンプリングは、式 (29) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる。したがって、ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\theta^{(n)}$ を用いて、パラメータベクトル $\theta = (\beta, \phi, a)$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる。ただし、ステップ 2 で利用する条件付き事後確

率密度関数 (式 (31)-(35)) からは直接にランダムサンプリングすることができないため、MH 法を用いて条件付き事後確率密度関数からのサンプリングを行う。

6. 実証分析

(1) 適用データの概要

多元的劣化過程モデルを実在する高速道路のジョイント部材に対する点検データに適用する。ジョイント部材に対する点検は路上点検と路下点検に分類できる。本適用事例では、路上点検で劣化事象 1 が、路下点検で劣化事象 2 が観測されるとする。路上点検、路下点検ともに、表-2 に示した判定基準により 4 段階の健全度判定がなされているが、路上点検と路下点検では損傷に対する判定項目が異なる。各点検の点検項目を表-3 に示す。路上点検、路下点検ともに、表-3 の項目に着目して点検が実施されるが、1つのジョイントに対する1回の点検業務では、表-2 に示した判定基準に基づき総合化された、路上と路下それぞれ1つの健全度のみが最終的に点検データベースに記録される。路上点検と路下点検で観測される損傷項目は、異常音など一部の重複を除き異なる。そのため、路上点検と路下点検で一部の項目の重複を許容しつつも、基本的には異なる劣化事象を観測しているとみなすことができる。具体的には、路上点検では、ジョイント本体、あるいはジョイントと後打ちコンクリートの隙間など走行快適性、安全性に影響を与える劣化事象が観測される。一方、路下点検では、漏水、排水樋の損傷など、橋梁下部構造の劣化の進展に影響を与えるような劣化事象が観測される。

路上点検と路下点検における多元的な劣化進行事例として、例えば、路上点検で観測されるゴムのはく離・き裂の発生に起因し路下点検における漏水が発生する場合などがある。このように、両点検結果同士の一部に相関関係が存在する可能性が考えられる。しかし、これらの詳細な情報をジョイントごとに1つの値として集約された、路上点検と路下点検それぞれの健全度か

表-3 各点検の点検項目²⁴⁾

点検種別	点検項目
路上点検	ゴム(段差, 摩耗, 剥離, き裂, 浮き, 陥没, 盛り), 鋼(フィンガー段差・遊間, 欠損, 浮き, 陥没), 突合せ(段差, シール材の摩耗・剥離・脱落), 切削目地(段差・隙間・陥没・盛り・欠損・浮き), 取付部(充填物の脱落, ボルト欠損), 共通項目(ジョイントと後打ち材の段差・隙間, 後打ち材と舗装の段差・隙間, 後打ち材の陥没・盛り・欠損・浮き・表面剥離)
路下点検	本体及びライナープレート・端部補強部材の損傷, ボルトの欠損及びゆるみ, 錆及び腐食, 床版遊間, 異常音, 排水樋のつまり及び損傷, 漏水, 止水工の損傷, 排水管のつまり及び損傷

表-4 適用データ諸元

		路上点検データ				路下点検データ					
ジョイント総数		366				2,368					
点検実施年		1994-2006 年				1982-2007 年					
総サンプル数		394				6,370					
平均点検間隔		1.90 年				3.10 年					
サンプル 詳細	事前 健全度	事後健全度				事後健全度					
			1	2	3	4		1	2	3	4
		1	111	62	57	48	1	764	236	1,478	359
		2	-	22	7	2	2	-	128	209	45
		3	-	-	63	6	3	-	-	2,016	506
4	-	-	-	16	4	-	-	-	629		

表-5 未知パラメータ推定結果

事後分布 統計量	健全度	路上点検：劣化事象 1		路下点検：劣化事象 2	
		定数項 $\beta_{i,1}^1$	ジョイント種別 $\beta_{i,2}^1$	定数項 $\beta_{i,1}^2$	ジョイント種別 $\beta_{i,2}^2$
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	1	0.930 (0.640, 1.268)	-1.361 (-1.749, -1.048)	0.535 (0.433, 0.648)	-1.002 (-1.127, -0.886)
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	2	-0.428 (-0.617, -0.221)	-	0.712 (0.604, 0.842)	-
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	3	-1.258 (-1.603, -1.010)	-0.465 (-0.901, -0.054)	-2.230 (-2.330, -2.126)	-0.302 (-0.436, -0.167)
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	分散 パラメータ ϕ_d	5.334 (4.736, 5.986)		3.058 (2.909, 3.210)	
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	コピュラ パラメータ a	1.612 (1.020, 2.203) -0.012			
AIC		13,067			

ら獲得することは困難であるために、対象点検データ群には各点検データ間の相関性が高い場合と低い場合が混在している。そこで、本研究ではこれらの相関性の不確実性をコピュラを用いて表現する。また、路上点検は道路のリフレッシュ工事などの一斉通行止め期間や簡易規制による通行止めを利用して実施されるために、対象とするジョイント部材全体に亘り点検データを獲得することは難しい。一方、路下点検は通行止めの必要がなく管理対象とするジョイント部材に対して網羅的に点検データを獲得することができる。このよ

うに、一部の点検データ(劣化事象)において、部分的にのみ点検結果が観測されている場合においても、本研究で提案する多元的劣化過程モデルを用いると、連結可能性条件(式(17))を満足する場合には、多元的劣化過程全体を推定することができる。本適用事例では、構造物カテゴリーを最も細分化して個々のジョイントと設定する。表-4に、路上点検、路下点検で得られた各データの諸元を示す。333個のジョイントで路上点検データ、路下点検データの双方が獲得され、連結可能性条件が満たされた。また、路上点検データのみが

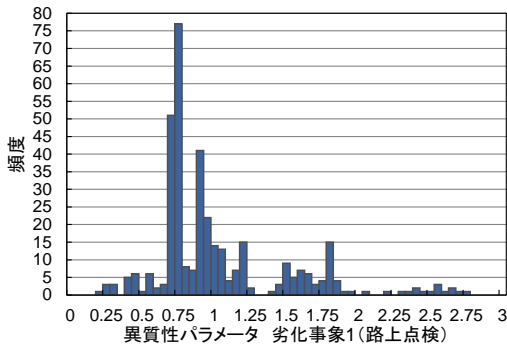


図-6 異質性パラメータ分布 (路上点検データ)

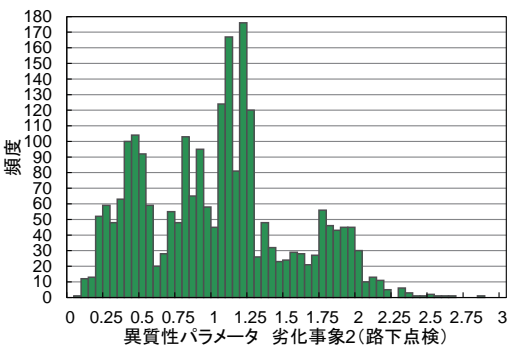


図-7 異質性パラメータ分布 (路下点検データ)

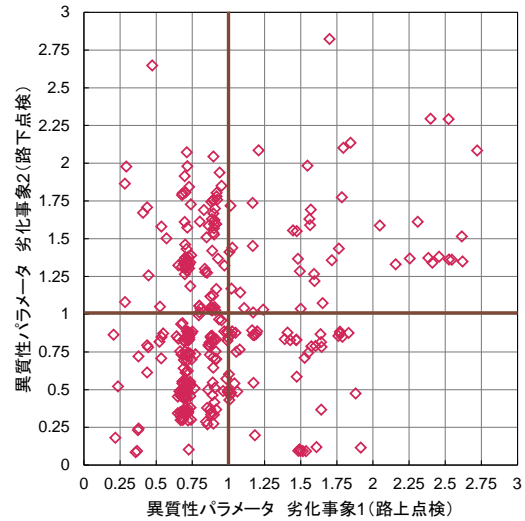


図-8 推定された異質性パラメータ

獲得された 33 個のジョイント，路下点検データのみが獲得された 2,035 個のジョイントに対する各点検データも，マルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータ，異質性パラメータの周辺分布のパラメータの推定に用いることができる．また，獲得サンプル数より，路上点検と比べ，路下点検の方がジョイント部材全体に対して頻繁に行われていることがわかる．ただし，今回の実証分析では，路線単位でのリニューアル工事に向けた一斉点検などの路上点検が重点的に行われた路線のジョイントが路上点検のサンプルとして採用された（2 時点での点検データが獲得された）ため，表-4 での平均点検間隔は路上点検の方が短い．しかし，一般的には，獲得サンプル数が示すように，路上点検データの方が路下点検データと比べサンプル数が少ない．

(2) パラメータ推定結果

6.(1) で述べた点検データに多元的劣化過程モデルを適用した．表-5 には，多元的劣化過程モデルの未知パラメータの推定結果，ベイズ推定の 90%信用域，Geweke 検定統計量²⁵⁾を示した．1) ジョイント種別，2) 上下区分，3) 車線番号，4) 床版種別，5) 表層舗装種別，6) 舗装面積，7) 曲線半径，8) 勾配，9) 下り勾配，10) 上り勾配，11) 橋長，12) 幅員，13) 設計荷重，14) 小型車交通量，15) 大型車交通量，を劣化過程に影響を

及ぼす説明変数の候補とした．AIC を比較し，符号条件を考慮した後，1) ジョイント種別（ゴム製ジョイントの場合に 0，鋼製ジョイントの場合に 1 を取るダミー変数として）を路上点検，路下点検の両方の劣化過程において説明変数として採用した．なお，AIC は推定されたモデルの尤度関数 \hat{L} とモデルの未知パラメータの数 k を用いて，

$$AIC = -2 \ln \hat{L} + 2k \quad (36)$$

と表現できる．各コピュラを含むモデル全体の AIC は，ガンベル・コピュラの時 13,070，クレイトン・コピュラの時 13,079，フランク・コピュラの時 13,067 となり，フランク・コピュラが AIC 最小を達成する最適コピュラとして選定された．さらに，多元的劣化過程モデルでは，表-5 の未知パラメータに加え，路上点検，路下点検それぞれの異質性パラメータも同時に推定される．図-6，図-7 に推定された各点検の異質性パラメータの分布を示した．異質性パラメータの期待値は路上点検データで 1.003，路下点検データで 1.001 である．表-5 のマルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータと図-6，図-7 の異質性パラメータの推定結果を用いて，それぞれのジョイントにおいて，劣化事象 1，2 の期待寿命を求めることができる³⁾．

(3) コピュラと異質性パラメータ同時分布

多元的劣化過程モデルでは，異質性パラメータの同時分布をコピュラと異質性パラメータの周辺分布を用いて表現する．推定されたフランク・コピュラの未知パラメータは $a = 1.612$ である．図-8 には，推定された異質性パラメータの散布図を示した．なお，異質性パラメータの相関係数は 0.259 である．同図は各劣化事象の劣化速度をジョイント単位で多元的に示している．

本適用事例の場合、同図の2次元的なポジショニングが、6.(5)で述べるように補修・更新計画の立案へと影響を与える。

推定されたコピュラと異質性パラメータの周辺分布を用いて、異質性パラメータの同時分布を求めることができる。本適用事例でのパラメータ推定値 $\hat{a} = 1.612$, $\hat{\phi}_1 = 5.334$, $\hat{\phi}_2 = 3.058$ を用いて異質性パラメータの同時分布の確率密度関数 $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ をフランク・コピュラを用いて具体的に書き表すと、

$$\begin{aligned}
 & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\
 &= -a \left\{ \exp(-a) - 1 \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ -a \frac{\gamma(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_1 \varepsilon_1)}{\Gamma(\hat{\phi}_1)} \right\} \exp \left\{ -a \frac{\gamma(\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_2 \varepsilon_2)}{\Gamma(\hat{\phi}_2)} \right\} \\
 & \cdot \left[\left\{ \exp(-a) - 1 \right\} + \left[\exp \left\{ -a \frac{\gamma(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_1 \varepsilon_1)}{\Gamma(\hat{\phi}_1)} \right\} - 1 \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[\exp \left\{ -a \frac{\gamma(\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_2 \varepsilon_2)}{\Gamma(\hat{\phi}_2)} \right\} \right] \right]^{-2} \\
 & \cdot \frac{\hat{\phi}_1^{\hat{\phi}_1}}{\Gamma(\hat{\phi}_1)} \varepsilon_1^{\hat{\phi}_1-1} \exp(-\hat{\phi}_1 \varepsilon_1) \cdot \frac{\hat{\phi}_2^{\hat{\phi}_2}}{\Gamma(\hat{\phi}_2)} \varepsilon_2^{\hat{\phi}_2-1} \exp(-\hat{\phi}_2 \varepsilon_2)
 \end{aligned} \tag{37}$$

となる。ただし、 $\gamma(\cdot)$ は不完全ガンマ関数、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。このように、フランク・コピュラの密度関数と周辺確率密度関数を用いて、異質性パラメータの同時確率密度関数を表現できる。この同時確率密度関数を用いて図-8に示した異質性パラメータ同士の関係を定量的に表現することができる。図-9に異質性パラメータの同時確率密度関数を示した。同図から、路上点検あるいは路下点検の一方の異質性パラメータが大きき場合、他方の異質性パラメータも大きくなる確率が高い傾向にあることが見て取れる。このことは、特性変数であるジョイント種別の影響を取り除いた後の劣化速度を相対的に比較したとき、片方の点検（劣化事象）での劣化の進展が速いと、もう一方の劣化事象においても劣化の進展が速いという多元的な劣化の進展過程を表現している。

なお、本研究の実証分析では、ガンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラ、フランク・コピュラの中からフランク・コピュラがAICを最小とするコピュラとして推定結果に採用された。フランク・コピュラはガンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラと比べ確率変数間の裾依存性が小さい¹²⁾。このことは、異質性パラメータが大ききあるいは小さい、すなわち、劣化速度が相対的に大ききあるいは小さいジョイントで特に劣化過程間の相関性が強くなるのではなく、劣化速度の大小に関わらず、劣化速度に相関性が存在することを意味する。なお、本研究では上記の3種類のコピュラを対象に推定結果として用いるコピュラを選定したが、特

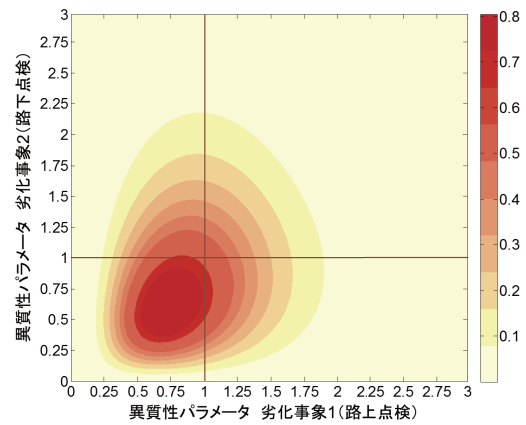


図-9 異質性パラメータの同時確率密度関数

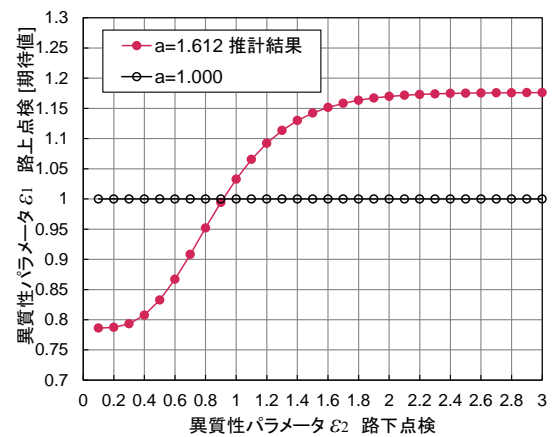


図-10 ε_2 の変動に応じた ε_1 の変動

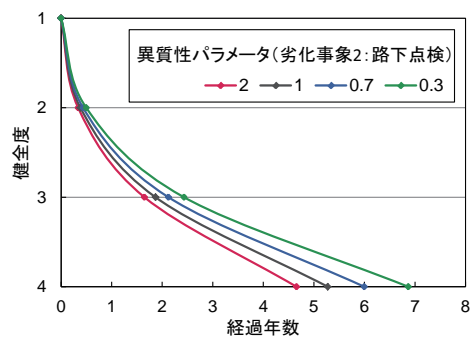


図-11 路下点検結果の差異による路上劣化過程の変動

に、3種類以上の劣化事象を考慮する際には、7.で述べるように3種類以外の多様なコピュラを候補としてモデルを推定し、AICをさらに小さくするようなモデルを決定していくことが望ましい。

(4) 多元的劣化過程

図-10には、路下点検の異質性パラメータ ε_2 を与件とした場合の路上点検の異質性パラメータ ε_1 の条件付

き確率

$$f(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = \frac{f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{f_2(\varepsilon_2)} = c(\varepsilon_1, \varepsilon_2)f_1(\varepsilon_1) \quad (38)$$

の期待値を、劣化事象2である路下点検の異質性パラメータ ε_2 の値に応じて示している。同図の赤色プロットは、コンピュータのパラメータ推定結果 $a = 1.612$ を用いて路上点検の異質性パラメータ ε_1 の期待値を算出した結果である。 ε_2 の増加に伴い、 ε_1 の値も増加しており、路上・路下点検におけるそれぞれの劣化速度間に正の相関関係が確認できる。この結果を用いることにより、路下点検結果のみを用いて、路下点検の異質性パラメータ、路上点検の異質性パラメータの両方を予測することが可能となる。このように、異質性パラメータの同時分布を用いて、複数の劣化事象の多元的な劣化過程を部分的な観測情報から求めることができる。なお、図-10の黒色プロットは、フランク・コンピュータのパラメータを $a = 1.000$ とした場合、すなわち、路上・路下点検データを2種類の混合マルコフ劣化ハザードモデルで別個に推定した場合を想定している。このとき、路下点検の異質性パラメータの値に関わらず、路上点検データの異質性パラメータの期待値は一定値(1.000)を取っており、劣化事象同士の複合的劣化過程を確認することはできない。

図-11には、路下点検データのみが獲得されている場合を想定し、図-10の結果を用いて算出した、路下点検データの異質性パラメータの変動に応じた路上点検(劣化事象1)の期待劣化パスを示している。なお、説明変数として、ゴム製ジョイントを採用した場合の期待劣化パスを示している。同図のように、路下点検(劣化事象2)の劣化速度の増加に伴い、路上点検(劣化事象1)の劣化速度も増加していく様子を定量的に評価することが可能となる。

(5) 実務的示唆

本研究では、混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータ間の相関性をコンピュータを用いて定量化した。社会基盤施設の劣化速度を多元的に評価することにより、以下のような考察を行うことができる。

再び図-8に着目する。同図において、路上点検、路下点検ともに異質性パラメータが1.0以上となる第1象限に位置するジョイントは、路上点検で観測される劣化事象と路下点検で観測される劣化事象の双方で劣化の進展が速い。ジョイント部材の場合、このグループに対しては、ジョイント上面のゴムの取替えのみならず、ジョイント下面の排水樋をはじめとした排水機構を含めた大規模な補修・更新の必要性を考慮に入れ、重点的な管理を行わなければならない。次に、路上点検の異質性パラメータが1.0以上、路下点検の異質性パラ

メータが1.0以下となるような、第4象限に位置するジョイント部材に対しては、上面のゴムの取替えや後打ち材の更新、後打ち材と舗装部の段差・隙間の場合を想定した舗装の一部打ち替えなどを想定する必要がある。また、路上点検の異質性パラメータが1.0以下、路下点検の異質性パラメータが1.0以上となるような、第2象限に位置するジョイント部材に対しては、路上点検で観測される劣化事象の劣化が進展した場合には、ジョイント上面と下面を同時に取り替えるような大規模補修を実施する必要がある。重点的な路上点検を行うとともに、第1象限に位置するジョイント部材群の次に大規模補修・更新の必要性が高いことを勘案した補修計画を立てなければならない。

さらに、多元的劣化過程モデルでは、図-9に示した異質性パラメータの同時分布を求めた。あるジョイントが図-9の各象限に位置する同時確率は、第1象限が0.363、第2象限が0.201、第3象限が0.216、第4象限が0.220であり、これらは管理対象とするジョイント部材の全数に対する、各象限に位置するジョイントの数の割合を意味している。このように、各象限に位置するジョイント数を求めることにより、予算計画や大規模補修計画に有益な情報を提供できると考えられる。加えて、例えば、路下点検でのみ点検結果が獲得されている場合においては、路下点検データの異質性パラメータという断片的な情報を用いて、当該ジョイントが、第1象限か第2象限、あるいは、第3象限か第4象限のいずれに位置するのかを定量的に評価することができる。このように、部分的な観測情報から多元的な劣化過程を確率的に表現可能な点も本研究の特徴である。

7. おわりに

本研究では、複数の異なる劣化事象を観測した複数の点検データを用いて、多元的劣化過程を予測するための方法論を提案した。具体的には、個々の劣化事象の劣化過程を混合マルコフ劣化ハザードモデルで表すとともに、各劣化事象内の異質性間に介在する相関性をコンピュータを用いて表現し、多元的劣化過程モデルとして定式化した。また、提案モデルを階層ベイズモデルと捉え、同時事後確率密度関数を定式化するとともにMCMC法を用いた推定手法を提案した。最後に、高速道路ジョイント部材の点検データを用いて本研究の有用性を実証的に示した。多元的な劣化過程をモデル化することにより、単一の劣化事象内での劣化速度の相対比較のみならず、複数の劣化事象での劣化速度を考慮した多元的なグルーピングが可能となる。その結果、部材の重点的な監視のみならず、各部材の劣化事象に

合わせた補修計画を立てることが可能となる。さらに、本研究で提案した多元的劣化過程モデルでは、連結可能性条件を満足する場合には、一部の部材での部分的な観測を許容し、多元的劣化過程全体を推定することができる。そのために、本研究で推定された結果を用いることにより、部分的な観測情報から、多元的な劣化過程を予測することが可能となる。

一方、今後に残された課題がいくつか存在する。第1に、本研究の実証分析では、高速道路ジョイント部材を対象とした1事例を示すに留まったが、今後、適用事例の拡大、考察を通して、方法論の逐次改善を行うことが重要となる。第2に、コピュラに関して、本研究では、1つのパラメータを持つアルキメディアン・コピュラを用いたが、劣化事象の数の増加に伴い、例えば、2つ以上のパラメータを持つアルキメディアン・コピュラや各劣化事象間に異なる種類のコピュラを定義した vine コピュラ²⁶⁾を推定する手法などを用いて、劣化事象間の相関関係をより詳細に表現する方法を開発せねばならない。その際、劣化事象の数が増えても本研究で提案する多元的劣化過程モデルを直接的に適用できるが、サンプル数によってはモデル推定における計算負荷とモデルの未知パラメータの収束性が問題となる場合がある。これらの問題を解消するためには、準モンテカルロ法の適用や未知パラメータを段階的に推定していく方法を開発する必要がある。第3に、本研究では、ある構造物カテゴリーのある劣化事象の個別ハザード率において、全ての健全度で共通の値を取る異質性パラメータを設定したが、異質性パラメータを健全度ごとに設定する方法が考えられる。このとき、異質性パラメータが細分化され、推定精度の低下、計算負荷の増大が懸念される。そのため、階層ベイズ推定法の効率化、高速化を目指し、コピュラの設定方法についても議論を重ねることが重要となる。これらの課題を解決していき、複数の種類の多元的劣化過程モデルの候補の中から、例えば統計的な情報量基準などを用いて、実現象に対する適合性の高いモデルを逐次選定していくことが望ましい。

本研究の一部は、科学技術振興機構 SIP「道路インフラマネジメントサイクルの展開と国内外への実装を目指した統括的研究(研究代表・前川宏一)」および日本学術振興会科学研究費助成事業「特別研究員奨励費」により実施された。また、本研究を遂行するに際して、阪神高速道路株式会社、阪神高速技術株式会社からジョイント部材の点検データを提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表す。なお、本研究で得られた知見は、著者ら独自のものであり、阪神高速道路株式会社や阪神高速技術株式会社、その他のいかなる団体の正式な見解ではないことを付記しておく。

参考文献

- 1) 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 実践的アセットマネジメントと第2世代研究への展望, 土木技術者実践論文集, Vol.1, pp.67-82, 2010.
- 2) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 3) 小濱健吾, 岡田真一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 4) 水谷大二郎, 貝戸清之, 小林潔司: 階層ベイズ法による補修効果の事後評価, 土木学会論文集 F4, Vol.69, No.2, pp.204-211, 2013.
- 5) 伊庭幸人: 計算統計学のフロンティア 計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, 2005.
- 6) 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
- 7) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 8) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集 F, Vol.62, No.3, pp.473-491, 2006.
- 9) 貝戸清之, 小林潔司, 青木一也, 松岡弘大: 混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計, 土木学会論文集 D3, Vol.68, No.4, pp.255-271, 2012.
- 10) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
- 11) Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
- 12) 戸坂凡展, 吉羽要直: コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 日本銀行金融研究所, 金融研究, pp.115-162, 2005.
- 13) 桑野将司, 藤原章正, 塚井誠人, 張峻屹, 岩本真由子: コピュラを用いた自動車保有期間と走行距離の同時決定モデルの開発, 土木学会論文集 D, Vol.66, No.1, pp.54-63, 2010.
- 14) 森村英典, 高橋幸雄: マルコフ解析, 日科技連, 1979.
- 15) Sklar, A.: Random variables, joint distribution functions, and copulas, *Kybernetika*, Vol.9, No.6, pp.449-460, 1973.
- 16) Gumbel, E. J.: Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
- 17) Clayton, D. G.: A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
- 18) Frank, M. J.: On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.
- 19) Romano, C.: Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market, *Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati*, Vol.12, 2002.
- 20) Deheuvels, P.: Non parametric tests of independence, *Statistique non Paramétrique Asymptotique Lecture Notes in Mathematics*, Vol.821, pp.95-107, 1980.
- 21) Breymann, W., Dias, A. and Embrechts, P.: Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quantitative Finance*, Vol.3, No.1, pp.1-14, 2003.
- 22) 小西貞則, 北川源四郎: 予測と発見の科学 情報量基準, 朝倉書店, 2006.

- 23) 阿部誠, 近藤文代: マーケティングの科学-POS データの解析-, 朝倉書店, 2005.
- 24) 阪神高速道路株式会社: 道路構造物の点検要領, 共通編, 土木構造物編, 2005.
- 25) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, in Bernardo, J. M., Berger, J. M., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M. (eds.), *Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 26) Bedford, T. and Cooke, R. M.: Vines—a new graphical model for dependent random variables, *Annals of Statistics*, Vol.30, No.4, pp.1031-1068, 2002.

(2014. 11. 4 受付)

MULTIDIMENSIONAL INFRASTRUCTURE DETERIORATION PROCESS MODEL

Daijiro MIZUTANI, Kengo OBAMA, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI

The deterioration state of each civil infrastructure is evaluated from various aspects, while focusing on several deterioration phenomena. In addition, there is a possibility that several deterioration events interact with one another. In this study, the authors propose a multidimensional deterioration process model for civil infrastructures considering the interaction among several deterioration events. In detail, the progression of each deterioration event is expressed by a mixed Markov deterioration hazard model including heterogeneity parameters. Furthermore, the authors propose a multidimensional deterioration process model expressing the heterogeneity of deterioration rate in each deterioration event with a gamma distribution, and the heterogeneity correlation structure among deterioration events with the Archimedean copula, and a methodology of Bayesian estimation. Lastly, the effectiveness of the proposed method is discussed by using the actual inspection data of expressway expansion joints.