

## 2次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

小林 潔司<sup>1</sup>・水谷 大二郎<sup>2</sup>・松島 格也<sup>3</sup>・山本 浩司<sup>4</sup>・貝戸 清之<sup>5</sup>・坂口 創<sup>6</sup>

<sup>1</sup>フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻・日本学術振興会特別研究員 DC (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)  
E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 京都大学准教授 大学院工学研究科都市社会工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)  
E-mail: matsushima.kakuya.7u@kyoto-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 中日本高速道路株式会社 東京支社 環境・技術管理部 環境・技術チーム (〒 105-6011 東京都港区虎ノ門 4-3-1)  
E-mail: k.yamamoto.af@c-nexco.co.jp

<sup>5</sup>正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)  
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>6</sup>学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)  
E-mail: s.sakaguchi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

道路付帯機器システムの劣化速度と劣化加速度は、機器のタイプや使用・環境条件に応じて多様に異なる。これらの機器システムのアセットマネジメントを考えた場合、機器システムの多様な故障過程を把握した上で、最適管理施策を決定していくことが重要である。そこで、本研究では、機器タイプ間に潜在する劣化速度と劣化加速度の異質性を定量化した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルと、そのベイズ推計手法を提案する。さらに、2種類の異質性の周辺分布をガンマ分布として表現するとともに、異質性の相関構造をアルキメディアン・コピュラを用いて表現し、2種類の異質性の同時分布を定量化する。最後に、高速道路付帯機器システムに対する実点検データを用いて、本研究で提案する手法の有用性を検証する。

**Key Words :** *two-dimensional mixed Weibull model, copula, Bayesian estimation, asset management*

### 1. はじめに

道路交通サービスを支援する道路付帯機器システム(以下、機器システム)は、多様かつ膨大な数の機器群により構成されている。機器システム導入時点から時間が経過するに従って、各機器の劣化が進展し、機器の故障率が増加する。故障した、あるいは劣化の進展した機器に対しては、適宜更新が実施される。このとき更新施策として、1) 時間軸上のある時点でシステム内の全ての機器を故障の有無にかかわらず更新する一括更新施策、2) 定期的に実施される点検の実施時点で故障している機器のみを更新する逐次更新施策が考えられる。また、一般的な社会基盤施設と比べ、機器システムの保守を実行するためには、部品調達等の在庫問題や、陳腐化した機器システムに対する保守技術者の確保等が必要となる。このような機器の陳腐化に伴うリスク<sup>1)</sup>は、システム導入からの時間経過に伴って増大する。機器システムのアセットマネジメントを実施するためには、機器システムの導入時点において各機器の故障過程を定量化し、一括更新施策および逐次更新施策それぞれにおける期待故障数等を把握することによって、機器の保守業務に関する緻密な計画を策定していくことが重要となる。

機器の故障過程は、ハザードモデル<sup>2),3)</sup>に代表される生存時間解析に基づいて記述される。故障解析において用いられるワイブル劣化ハザードモデル<sup>4)</sup>では、劣化過程は劣化速度と劣化加速度で制御される(2.と3.で述べるように、ワイブル劣化ハザード関数は尺度パラメータと形状パラメータで表現され、ハザード関数自体が劣化速度を示す。本研究では、2.(3)で示すような異質性の2次元配置に着目するといった目的のもと分析を進めるために、施設の劣化速度の特性がハザード関数の尺度パラメータで、劣化加速度の特性が形状パラメータで代表されるという考えのもと、劣化速度、劣化加速度という用語を使用する)。不可観測な要因が機器の劣化過程に及ぼす影響が無視できない場合も少なくない。劣化速度に影響を及ぼす観測不可能な要因をガンマ分布に従う確率変数(異質性パラメータ)として表現したランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルが提案されている<sup>5)</sup>。ただし、ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルは、劣化速度に介在する異質性を異質性パラメータとして定義して、故障の発生確率(ハザード率)に乗ずることによって個々の機器の劣化過程を表現した比例ハザードモデルであり、同モデルにおいてワイブル劣化ハザードモデルの劣化加速度に介在する異質性は考慮されていない。ランダム比例ワ

イブル劣化ハザードモデルを用いることにより、例えば、機器タイプ（あるいは機器タイプを使用・環境条件でさらに細分化した機器グループ）ごとに劣化過程を識別することが可能となったが、現実の機器の劣化過程を考えた場合、機器タイプごとに損傷項目が異なることから、劣化加速度も劣化速度と同様に、多様に変化すると考えられる。さらに、上述の2種類の更新施策（一括更新施策、逐次更新施策）のいずれを採用するかを考えた場合、**2.(3)**で詳述するように、機器タイプごとの劣化加速度が極めて重要な因子となり、劣化速度のみならず、劣化加速度に対しても異質性を考慮する必要がある。

以上の問題意識のもとに、本研究では機器システムを構成する機器の故障率の時間的変化を、劣化速度、劣化加速度に関する2種類の異質性を考慮した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルで表現する。その際に、2種類の異質性パラメータの周辺分布をガンマ分布として表現するとともに、異質性の相関構造をアルキメディアン・コピュラを用いて表現し、2種類の異質性の同時分布を定義する。以下、**2.**で本研究の基本的な考え方を説明する。**3.**では機器システムの故障過程をモデル化し、**4.**で2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの推計手法について述べる。**5.**では高速道路の道路付帯機器システムを対象とした適用事例を示す。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 従来の研究概要

本研究では、道路付帯機器の故障過程をワイブル劣化ハザードモデルで表現するとともに、膨大な種類の機器で構成される道路交通サービスの支援機器の故障特性の異質性を系統的に分析する方法論を提案する。機器の統計的故障解析に関しては、ハザードモデル<sup>2),3)</sup>を用いた研究事例が蓄積されている。また、アセットマネジメントの分野においても、マルコフ劣化ハザードモデルをはじめとして、多様な劣化ハザードモデルが提案されている<sup>6)-10)</sup>。道路付帯機器の故障過程を分析する場合、機器の故障事象は、故障の有無という2値情報で表現されるために、伝統的なハザードモデルの適用が可能である。すでに、貝戸等は、交通管制システムが膨大な種類の機器類で構成されていることに着目し、多品種・少数の機器群の故障過程をモデル化するために、ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル<sup>5)</sup>を提案している。ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルでは、ベンチマークとなる標準的な故障ハザード関数を異質性パラメータ<sup>11),12)</sup>が1となる場合のベースライン関数を用いて表現するとともに、個々の機器の故障ハザード関数の異質性を比例的パラ

メータを用いて表現することを目的としている。本研究では、ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルに劣化加速度の異質性を加えて考慮した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを開発する。

2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは、劣化速度と劣化加速度の関係をコピュラ<sup>13),14)</sup>を用いて表現する。貝戸等<sup>15)</sup>は、高速道路橋伸縮継手装置の劣化予測において、異なる劣化事象における複数種類の点検データに対し、コピュラを用いることによる点検データ欠損補完の可能性を示唆した。水谷等<sup>16)</sup>は、コピュラを用いた多元的劣化評価に着目するとともに、点検データ欠損の補完も実現している。一方、本研究では、単一の劣化事象を対象としており、複数の劣化事象を用いた多元的劣化評価やデータ欠損の補完には主眼を置いていない。**2.(2)**、**2.(3)**で述べるように、単一の劣化事象に着目し、当該劣化事象における劣化過程の劣化速度と劣化加速度の双方を用いた多元的劣化評価により、点検や更新の時期のみでなく、施設の更新施策の決定に直接資するような方法論を提案している点に本研究の新規性と有用性がある。

### (2) 機器システムの故障過程

機器システムの故障は、機器の劣化とは関係なく故障が発生する偶発的故障と、劣化が原因となって発生する消耗系故障に大別される。偶発的故障の発生過程は指数劣化ハザードモデル、消耗系故障の発生過程はワイブル劣化ハザードモデルにより表現できる。消耗故障系機器では、直近の更新時点からの経過時間が長くなるほど、故障の発生確率（ハザード率）が大きくなる。本研究では、このような消耗故障系機器の寿命分布がワイブル分布に従うと仮定する。さらに、異なる機器のハザード率が、時間の関数として表現できると考える。このようなハザード率の時間的変化を表した関数をハザード関数と呼ぶ。一方、偶発故障系機器の寿命分布は指数分布に従うとする。高速道路の機器システムには、消耗故障系機器と偶発故障系機器が混在していると考えられる。指数劣化ハザードモデルは、ワイブル劣化ハザードモデルの加速度パラメータを1.0とした特殊形である。本研究で提案する2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは、加速度パラメータ**(3.**以降の $mp$ )の定義域 $(0, \infty)$ に1を含み $m$ 、 $\rho$ を推計する。 $m$ は、機器群全体の劣化加速度を規定し、モデルの推計過程では、平均を1とする加速度の異質性パラメータ $\rho$ に対する規格化定数の役割も兼ねる。一方、平均値を1とする $\rho$ は、個々の機器タイプごとに規定され、機器タイプの劣化加速度の異質性を推計する。推計された $mp$ が1に近づけば、当該機器タイプでは偶発的故障が卓越し、 $mp$ が大きくなるにつれ消耗故障が

卓越する。このように、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを推計することにより、それぞれの機器タイプの故障特性を明示的に識別できる。

機器システムは数多くの機器で構成されるが、それぞれの個別タイプの機器数はそれほど多くない。ワイブル劣化ハザード率の異質性を混合確率モデルで表現しない場合、同一の故障特性を有する機器タイプごとに異なるワイブル劣化ハザードモデルを推計することが必要となる。しかし、各機器システムを構成する機器の数が少ない場合、ワイブル劣化ハザードモデルを推計することが困難となる。以上のことを考慮すると、機器間の劣化速度の異質性をハザード率に乗ずる確率分布として、また劣化加速度の異質性を加速度パラメータに乗ずる確率分布として、それぞれ表現可能な2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルは、多品種・少数の機器構成を有する機器システムの故障過程を表現するために優れた性質を有しているといえる。

### (3) 異質性の2次元配置の定量化と更新施策

本研究で提案する2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは、劣化速度の異質性と劣化加速度の異質性を2次元的に表現する。機器システムに限らず、社会基盤施設の劣化過程には施設の種類や設置箇所の違いに起因した異質性が存在することが少なくない。これまでにランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル<sup>5)</sup>や混合マルコフ劣化ハザードモデル<sup>9)</sup>のような、ハザード率に対する比例的な異質性を表現した劣化予測モデルが開発されている。しかし、機器システムでは、その供用経過時間が劣化加速度としてハザード率に大きく影響するため、劣化加速度の異質性を考慮した上でシステム全体の点検・更新施策を検討することが望ましい。

消耗故障系機器では、供用開始からある程度時間が経過した時点で、複数の機器が一斉に故障し始める。同時に供用が開始された複数の消耗故障系機器に対して、逐次更新施策を行った場合、供用開始直後では、更新対象の機器が極めて少なく、ある程度時間が経過した後はリスク管理水準を満足しない、あるいは、逐次更新で相当数の機器を更新するという不経済が生じてしまう。そのため、このような消耗故障系機器に対しては、ある時間が経過した時点で一括更新を行う施策がリスク管理水準を満足しつつ、ライフサイクル費用を最小とする最適施策であると考えられる。一方で、偶発故障系機器に対しては、同様の議論を通じて、逐次更新施策が最適施策となると考えられる(当然のことながら、このような議論を行う際には、5.(4)で言及するようなライフサイクル費用評価やリスク分析を通じた定量的評価をすることが望ましいが、本研究ではこれら

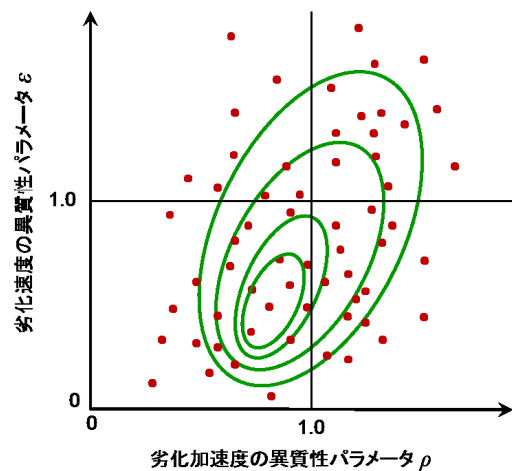


図-1 2次元異質性パラメータと同時分布

に関しては今後の課題とする)。2.(2)で述べたように、ある機器タイプにおいて、偶発故障、消耗故障のいずれが卓越するかは、劣化加速度の異質性として表現でき、劣化加速度の異質性を推計することにより、機器タイプに対して、一括更新施策と逐次更新施策のいずれを採用すべきかという問題を解決することができる。このように、機器の更新施策の決定を目的として、劣化加速度の異質性を定量的に評価した事例は、筆者らが知る限り過去には存在しない。

2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは、劣化速度と劣化加速度の2種類の異質性を点検・更新施策の評価単位ごとに推計する。劣化速度の異質性は点検間隔や更新間隔に、また上述のように、劣化加速度の異質性は更新施策に主に影響する。図-1には、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを用いて導出できる2次元異質性プロットを模式的に示している。個々のプロットは、それぞれの評価単位を表し、横軸は劣化加速度の異質性パラメータ、縦軸は劣化速度の異質性パラメータを表す。同図を用いることにより、劣化速度が大きく、重点監視を行うべき機器タイプや設置箇所を抽出できる。このような問題意識のもとに、本研究では、劣化速度の異質性と劣化加速度の異質性の同時分布を異質性パラメータの周辺分布とコピュラ<sup>13),14)</sup>を用いて定義する。コピュラは、複数の確率変数の周辺分布関数とそれらの同時分布関数を接合する関数であり、接合分布関数とも呼ばれる。コピュラを推計することにより、平均値を1とする個々の異質性分布の確率構造を保持しながら同時分布を推計することができる。これにより、2種類の異質性間の相関関係も定量的に評価できる。図-1に併せて示した2種類の異質性の同時分布を推計することにより、異質性の2次元プロットを定量化することができる。2種類の異質性プロットの定量化により、システムを構成する機器群のうち、どの程

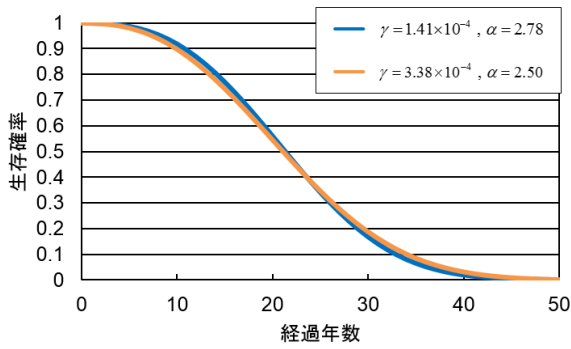


図-2 パラメータと生存関数の関係

度の個数の機器に対していずれの更新戦略を適用するかに関する方針を検討することができる。1. で述べたように、高速道路付帯機器システムにおいては、技術的陳腐化が起因し、その保守業務に必要な資源数を予め把握しておくことが極めて重要となる。本研究で提案する方法論は、更新施策の最適化のみならず、管理者が保有する機器システム全体に対して、将来必要となる保全のための資源数をシステムの導入時に把握することを可能とし、システム導入の計画段階においても非常に有用となる。

#### (4) 推計値ペアの選択問題

本節では、コンピュータを用いて2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを推計する計量経済学的な意義について考察する。機器の使用時間が  $s$  のとき、故障する確率密度を表すワイブル劣化ハザード関数は、尺度パラメータ  $\gamma$  と形状パラメータ  $\alpha$  を用いて、

$$\lambda(s, \gamma, \alpha) = \gamma \alpha s^{\alpha-1} \quad (1)$$

と表現できる。パラメータペア  $(\gamma, \alpha)$  を所与とすると故障確率の推移過程は一意に定まる。ここで、 $(\gamma_a, \alpha_a) = (1.41 \times 10^{-4}, 2.78)$ 、 $(\gamma_b, \alpha_b) = (3.38 \times 10^{-4}, 2.50)$  という2種類のパラメータペアをとりあげる。図-2は、それぞれのパラメータペアに対してワイブル劣化ハザードモデルを用いて求めた生存関数を示している。同図に示すように、2つのパラメータペアは明らかに異なる値をとるものの、生存関数の形状が極めて類似している。このことは、ワイブル劣化ハザードモデルを最尤推計するための尤度関数の凸性が保証されておらず、最尤推計問題に多くの局所最適解が存在することに起因している。しかも、複数の局所解に対する尤度関数値に大きな差異が存在せず、パラメータの最尤推計値を一意的に求めることが困難になる可能性が存在する。この問題は、ワイブル劣化ハザードモデルにおける本質的な問題であるが、劣化加速度に対しても異質性を考慮した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルにおいては、特にこの問題が顕著となる。2次元混合ワイブル

劣化ハザードモデルの場合、尺度パラメータ  $\gamma$  と形状パラメータ  $\alpha$  を推計するにとどまらず、機器グループごとにこれら2つのパラメータに対して定義された異質性パラメータ値を推計することが必要となる。この場合、個別機器グループごとに異質性パラメータを推計するという方法では、「多くの局所最適な異質性パラメータの推計値ペア中でどのペアを選択すべきか」という推計値ペア選択の問題が発生する。

本研究では、このような異質性パラメータ推計値の選択における不安定性の問題を、コンピュータを用いた2種類の異質性パラメータの同時分布をパラメトリックに設定することにより解消する。すなわち、尺度パラメータ  $\gamma$  と形状パラメータ  $\alpha$  の間に存在する相関構造を明示的に考慮して、コンピュータ全体の推計精度を最大にするように個別機器グループごとの異質性パラメータ値とワイブル劣化ハザードモデルを同時推計することにより、パラメータの推計値ペアの選択における不安定性の問題を克服することができる。

### 3. 2次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

#### (1) ワイブル劣化ハザードモデル

カレンダー時刻  $s_0$  を初期時点  $t = 0$  とする離散的時間軸を考える。時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。初期時点  $t = 0$  に機器が更新され、それが故障するまでの期間（以下、寿命と呼ぶ）に着目する。記述が煩雑となるのを防ぐため、機器のタイプに関する添え字を本節に限り省略する。さらに、機器は連続して使用されており、道路管制センターによる遠方監視、日常的な道路巡回や高速道路利用者の通報などにより、機器の故障の有無は常時観測されていると考える。機器の寿命を確率変数  $\zeta$  で表し、 $\zeta$  は確率密度関数  $f(\zeta)$ 、分布関数  $F(\zeta)$  に従って分布すると考える。ただし、寿命  $\zeta$  の定義域は  $[0, \infty)$  であり、 $f(0) = 0$ 、 $F(0) = 0$  が必ず成立する。いま、直近の更新時点から任意の使用期間  $s \in [0, \infty)$  に対して、機器が故障しないで生存する確率（以下、生存確率と呼ぶ） $\tilde{F}(s)$  は、全事象確率1から使用期間  $s$  の間に機器が故障する累積故障確率  $F(s)$  を差し引いた値

$$\tilde{F}(s) = 1 - F(s) \quad (2)$$

となる。機器が使用時間  $s$  にわたり生存し、かつ期間  $[s, s + \Delta s]$  中にはじめて故障する確率は

$$\lambda(s) \Delta s = \frac{f(s) \Delta s}{\tilde{F}(s)} \quad (3)$$

と表せる。機器が使用期間  $s$  にわたり生存し、かつその瞬間に故障する確率密度  $\lambda(s)$  を「劣化ハザード関数」

と呼ぶ。式(2)の両辺を  $s$  に関して微分することにより、

$$\frac{d\tilde{F}(s)}{ds} = -f(s) \quad (4)$$

を得る。このとき、式(3)は

$$\lambda(s) = \frac{f(s)}{\tilde{F}(s)} = \frac{d}{ds} \left( -\log \tilde{F}(s) \right) \quad (5)$$

と変形できる。ここで、 $\tilde{F}(0) = 1 - F(0) = 1$  を考慮し、式(5)を積分すれば

$$\int_0^s \lambda(u) du = -\log \tilde{F}(s) \quad (6)$$

を得る。したがって、劣化ハザード関数  $\lambda(u)$  を用いれば、使用期間  $s$  まで機器が生存する確率  $\tilde{F}(s)$  は

$$\tilde{F}(s) = \exp \left[ -\int_0^s \lambda(u) du \right] \quad (7)$$

と表される。このように、劣化ハザード関数  $\lambda(u)$  の関数形を決定すれば、機器の生存確率  $\tilde{F}(s)$  を導出することができる。さらに、 $\tilde{F}(s) = 1 - F(s)$  より、機器の累積故障確率  $F(s)$  を求めることができる。ここで、劣化ハザード関数としてワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda(s) = \gamma m s^{m-1} \quad (8)$$

を考える。ただし、 $\gamma$  は到着密度を表すパラメータ、 $m$  は時間を通じたハザード率の増加傾向を表す加速度パラメータである。ワイブル劣化ハザード関数を用いた場合、機器寿命の確率密度関数  $f(s)$ 、および機器の生存確率  $\tilde{F}(s)$  は、それぞれ

$$f(s) = \gamma m s^{m-1} \exp(-\gamma s^m) \quad (9a)$$

$$\tilde{F}(s) = \exp(-\gamma s^m) \quad (9b)$$

と表される。

## (2) 2次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

タイプ  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) の機器  $l_i$  ( $l_i = 1, \dots, L_i$ ) に着目する。機器が更新されてから経過した使用時間を  $s$  と表す。タイプ  $i$  の機器の故障事象のハザード率の時間的変化は、機器タイプ毎に異なると考え、2次元混合ワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda_i(s) = \gamma m \varepsilon_i \rho_i s^{m\rho_i - 1} \quad (10)$$

に従うと考える。 $\varepsilon_i$  はタイプ  $i$  の劣化速度の異質性を表すパラメータ、 $\rho_i$  は劣化加速度の異質性を表すパラメータである。これらの異質性パラメータは、同一タイプの機器に対して共通の値をとるように設定する。このとき、タイプ  $i$  の機器の寿命分布を表す確率密度関数  $f_i(s)$ 、および生存確率  $\tilde{F}_i(s)$  は、それぞれ

$$f_i(s) = \gamma m \varepsilon_i \rho_i s^{m\rho_i - 1} \exp(-\gamma \varepsilon_i s^{m\rho_i}) \quad (11a)$$

$$\tilde{F}_i(s) = \exp(-\gamma \varepsilon_i s^{m\rho_i}) \quad (11b)$$

と表される。

ここで、異質性パラメータ  $\varepsilon_i, \rho_i$  がそれぞれ別個のガンマ分布に従うと仮定する。一般に、ガンマ分布  $R(\alpha, \beta)$  の確率密度関数  $r(\varepsilon_i : \alpha, \beta)$  は

$$r(\varepsilon_i : \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \varepsilon_i^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\beta}\right) \quad (12)$$

と定義できる。 $r(\varepsilon_i : \alpha, \beta)$  は  $\varepsilon_i$  を変数とする関数であり、パラメータ  $\alpha, \beta$  に応じて変化する。そのことを明示するために記号「:」を用いている。ガンマ分布  $R(\alpha, \beta)$  の平均は  $\mu = \alpha\beta$ 、分散は  $\sigma^2 = \alpha\beta^2$  である。また、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。異質性パラメータの平均値を1に基準化するために、平均値1、分散  $1/\phi$  のガンマ分布の確率密度関数  $g(\varepsilon_i : \phi)$

$$g(\varepsilon_i : \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon_i^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon_i) \quad (13)$$

に異質性パラメータ  $\varepsilon_i$  が従うと考える。同様に、劣化の進行加速度に関する異質性パラメータ  $\rho_i$  に関しても、ガンマ分布の確率密度関数  $h(\rho_i : \psi)$

$$h(\rho_i : \psi) = \frac{\psi^\psi}{\Gamma(\psi)} \rho_i^{\psi-1} \exp(-\psi\rho_i) \quad (14)$$

に従うと仮定する。本研究では、ガンマ分布(13)、(14)のパラメータ  $\phi, \psi$  も機器の点検データを用いて推計する。具体的には、 $\phi, \psi$  をハイパーパラメータとする階層ベイズモデルを構築する。このことにより、異質性パラメータの推計精度を向上させることが可能となる。

## (3) 2次元異質性の相関構造

異質性パラメータ  $\varepsilon_i, \rho_i$  の同時確率分布をコンピュータ  $C$  を用いて表す。コンピュータの詳細は参考文献<sup>13)-17)</sup>に譲るが、読者の便宜を図るためにコンピュータの概要を説明する。周辺分布関数  $G, H$  を持つ確率変数  $\varepsilon_i, \rho_i$  の連続な同時分布関数を  $F(\varepsilon_i, \rho_i)$  とすると、スクラーの定理<sup>17)</sup>より、

$$F(\varepsilon_i, \rho_i) = C(G(\varepsilon_i), H(\rho_i)) \quad (15)$$

を満たすコンピュータ  $C$  が一意に存在する。スクラーの定理から、コンピュータ  $C$  に周辺分布  $G, H$  を適用することにより生成される  $C(G(\varepsilon_i), H(\rho_i))$  は、周辺分布を区間  $[0, 1]$  とする同時分布関数である。また、

- 任意の  $u = G(\varepsilon_i) \in [0, 1]$  について  $C(u, 0) = 0$
- 任意の  $u = G(\varepsilon_i) \in [0, 1]$  について  $C(u, 1) = u$
- 任意の  $v = H(\rho_i) \in [0, 1]$  について  $C(0, v) = 0$
- 任意の  $v = H(\rho_i) \in [0, 1]$  について  $C(1, v) = v$
- $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  を満たすすべての  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$  に対して、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} C(u_i, v_j) \geq 0$$

の3つの性質を全て満たすような関数  $C$  がコンピュータとして定義される<sup>14)</sup>。同時確率密度関数  $f(\varepsilon_i, \rho_i)$  は、コ

表-1 代表的なアルキメディアン・コピュラ

コピュラ	生成関数 $\zeta(x)$ ( $x = u, v$ )	分布関数 $C(u, v)$	確率密度関数 $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$
ガンベル $a \in (1, \infty)$	$(-\ln x)^a$	$\exp[-\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}}]$	$\frac{\exp[-\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}}] \prod_{x=u,v} \ln x^{-a-1}}{\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a-2}} [\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}} + a - 1]}$
クレイトン $a \in (0, \infty)$	$\frac{1}{a}(x^{-a} - 1)$	$(\sum_{x=u,v} x^{-a} - 1)^{-\frac{1}{a}}$	$\frac{(1+a)(\prod_{x=u,v} x^{-a-1})}{(\sum_{x=u,v} x^{-a} - 1)^{-\frac{1}{a}-2}}$
フランク $a \in (0, \infty)$	$\frac{\ln\{\exp(-ax) - 1\}}{-\ln\{\exp(-a) - 1\}}$	$-\frac{1}{a} \ln \left[ 1 + \frac{\prod_{x=u,v} \{\exp(-ax) - 1\}}{\{\exp(-a) - 1\}} \right]$	$\frac{-a \prod_{x=u,v} \exp(-ax) (\exp(-a) - 1)}{\{\exp(-a) - 1\} + \prod_{x=u,v} \exp(-ax) - 1}$

注) ただし, 任意の関数  $f(\cdot)$  に関して,  $\sum_{x=u,v} f(x) = f(u) + f(v)$ ,  $\prod_{x=u,v} f(x) = f(u)f(v)$  が成立する.

ピュラの分布関数  $C(G(\varepsilon_i), H(\rho_i))$  あるいは確率密度関数  $c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i))$  を用いて,

$$f(\varepsilon_i, \rho_i) = \frac{\partial^2 C(G(\varepsilon_i), H(\rho_i))}{\partial G(\varepsilon_i) \partial H(\rho_i)} g(\varepsilon_i) h(\rho_i) = c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i)) g(\varepsilon_i) h(\rho_i) \quad (16)$$

と表現できる. 周辺確率密度関数  $g(\varepsilon_i)$ ,  $h(\rho_i)$  はそれぞれガンマ分布の確率密度関数 (13), (14) で表現される. 周辺分布に関する情報を用いて同時確率分布を表現するために様々なコピュラが提案されている. 本研究では, 乱数発生方法が知られているなど実務的にも扱いやすい, 1パラメータ・アルキメディアン・コピュラ<sup>13)</sup>を用いる. 周辺分布関数をそれぞれ  $G(\varepsilon_i) = u$ ,  $H(\rho_i) = v$  とする2変量間の1パラメータ・アルキメディアン・コピュラの分布関数  $C(u, v)$  は, 生成関数  $\zeta(x)$  ( $x = u, v$ ) を用いて,

$$C(u, v) = \zeta^{-1}(\zeta(u) + \zeta(v)) \quad (17)$$

と表現できる. 本研究の実証分析においては, アルキメディアン・コピュラとしてガンベル・コピュラ<sup>18)</sup>, クレイトン・コピュラ<sup>19)</sup>, フランク・コピュラ<sup>20)</sup>の3種類のコピュラをとりあげる. 表-1にガンベル・コピュラ, クレイトン・コピュラ, フランク・コピュラの生成関数, 分布関数, 確率密度関数を示している. また, ガンベル・コピュラのパラメータは  $a \in (1, \infty)$ , クレイトン・コピュラ, フランク・コピュラのパラメータは  $a \in (0, \infty)$  を満たす. Romano<sup>21)</sup>は経験コピュラ<sup>22)</sup>との相違が最小となるコピュラを選定する方法を提案している. 一方, Breymann等<sup>23)</sup>は, パラメータ数の異なるコピュラ間での選定を考慮し, AIC (赤池情報量基準)<sup>24)</sup>をコピュラ選定基準としている. 本研究では, コピュラを内包したワイブル劣化ハザードモデル間でのモデル比較を行うため, 後者のAICをコピュラ選定基準として採用する.

このように, コピュラを用いることにより, 各異質性パラメータはそれぞれのガンマ分布に従い, 平均値が1となるというベンチマーキングモデルの特性を維

持しつつ, 異質性パラメータの同時分布を表現することができる. 本研究では, コピュラのパラメータ  $a$ , 周辺分布のパラメータ  $\phi$ ,  $\psi$  を推計することにより, 2種類の異質性パラメータの同時分布を推計する.

#### 4. モデルの推計手法

##### (1) 尤度関数の定式化

いま, タイプ  $i$  の機器  $l_i$  ( $l_i = 1, \dots, L_i$ ) に対して, それぞれの故障事象に関するデータ  $\bar{s}_{i,l_i}$ ,  $\bar{\delta}_{i,l_i}$  が得られていると考える.  $\bar{s}_{i,l_i}$  は機器が更新されてからの使用時間,  $\bar{\delta}_{i,l_i}$  は故障の有無を表すダミー変数であり,

$$\bar{\delta}_{i,l_i} = \begin{cases} 1 & \text{故障しているとき} \\ 0 & \text{故障していないとき} \end{cases} \quad (18)$$

と定義する. 記号「 $\bar{\cdot}$ 」は観測値であることを表す. ここで, 機器  $l_i$  の劣化速度が交通量などの可観測な特性変数に応じて変化すると考える. 機器  $l_i$  の  $z$  ( $z = 1, \dots, Z$ ) 番目の特性変数を  $\bar{x}_{i,l_i,z}$  とする. 2次元混合ワイブル劣化ハザード関数 (10) の  $\gamma$  を

$$\gamma_{i,l_i} = \exp(\bar{x}_{i,l_i} \beta') \quad (19)$$

とする.  $\bar{x}_{i,l_i} = (\bar{x}_{i,l_i,1}, \dots, \bar{x}_{i,l_i,Z})$  は特性変数ベクトルである.  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_Z)$  は未知パラメータベクトルである. 記号「 $'$ 」は転置操作を表す. 式 (11) に  $\gamma = \gamma_{i,l_i}$  を代入して定義される機器  $l_i$  の2次元混合ワイブル劣化ハザード関数の確率密度関数を  $f_{i,l_i}(s)$ , 生存確率を  $\bar{F}_{i,l_i}(s)$  と表す. さらに, 機器  $l_i$  に関する観測値を  $\bar{\xi}_{i,l_i} = (\bar{s}_{i,l_i}, \bar{\delta}_{i,l_i}, \bar{x}_{i,l_i})$  とする. さらに, 観測値データベクトルを  $\bar{\xi}_i = (\bar{\xi}_{i,1}, \dots, \bar{\xi}_{i,L_i})$  と表す. また, 観測値データ全体を  $\bar{\Xi}$  と表す.

いま, 機器  $l_i$  に関する観測値  $\bar{\xi}_{i,l_i}$  を与件とする.  $\bar{\xi}_{i,l_i}$  が生起する尤度は, 劣化ハザードモデル, 異質性パラ

メータの周辺確率密度関数, コピュラを用いて,

$$\begin{aligned}
 & \ell_{i,l_i}(\bar{\xi}_{i,l_i} : \beta, m, \varepsilon_i, \rho_i, a, \phi, \psi) \\
 &= \{f_{i,l_i}(\bar{s}_{i,l_i} : \beta, m, \varepsilon_i, \rho_i)\}^{\bar{\delta}_{i,l_i}} \\
 & \cdot \{\tilde{F}_{i,l_i}(\bar{s}_{i,l_i} : \beta, m, \varepsilon_i, \rho_i)\}^{1-\bar{\delta}_{i,l_i}} \\
 & \cdot c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a)g(\varepsilon_i : \phi)h(\rho_i : \psi) \\
 &= \{\exp(\bar{x}_{i,l_i}\beta')m\varepsilon_i\rho_i\bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i-1}\}^{\bar{\delta}_{i,l_i}} \\
 & \cdot \exp\{-\exp(\bar{x}_{i,l_i}\beta')\varepsilon_i\bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i}\} \\
 & \cdot c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a)g(\varepsilon_i : \phi)h(\rho_i : \psi) \quad (20)
 \end{aligned}$$

と表現できる. このとき, 全ての観測値データ集合  $\bar{\Xi}$  が観測される尤度  $\mathcal{L}(\bar{\Xi} : \theta, \varepsilon, \rho)$  は,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\bar{\Xi} : \theta, \varepsilon, \rho) \\
 &= \prod_{i=1}^I \prod_{l_i=1}^{L_i} \ell_{i,l_i}(\bar{\xi}_{i,l_i} : \beta, m, \varepsilon_i, \rho_i, a, \phi, \psi) \quad (21)
 \end{aligned}$$

と表現できる. ただし,  $\theta = (\beta, m, a, \phi, \psi)$  はパラメータベクトルを表し,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_I)$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_I)$  は異質性パラメータベクトルである.

## (2) 事前確率密度関数の設定

一般的なベイズ推計手法では, パラメータの事前分布と, 観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて, パラメータの事後分布を推計する. いま, 尤度関数を  $\mathcal{L}(\bar{\Xi} : \theta, \varepsilon, \rho)$  と表す. ここで, パラメータベクトル  $\theta$  が確率変数で, 同時事前確率密度関数  $\chi(\theta)$  に従うと仮定する. 目視点検データ  $\bar{\Xi}$  と異質性パラメータ  $\varepsilon, \rho$  が与件であるときに, 未知パラメータベクトル  $\theta$  の同時事後確率密度関数  $\Pi(\theta|\bar{\Xi}, \varepsilon, \rho)$  はベイズの定理より,

$$\Pi(\theta|\bar{\Xi}, \varepsilon, \rho) \propto \mathcal{L}(\bar{\Xi} : \theta, \varepsilon, \rho)\chi(\theta) \quad (22)$$

と表される. 未知パラメータベクトル  $\theta = (\beta, m, a, \phi, \psi)$  の各要素は独立であると考え, 同時事前確率密度関数  $\chi(\theta)$  を,

$$\chi(\theta) = \chi_\beta(\beta)\chi_m(m)\chi_\phi(\phi)\chi_\psi(\psi)\chi_a(a) \quad (23)$$

と展開する. 異質性パラメータは潜在変数として取り扱うため同時事前確率密度関数  $\chi(\theta)$  に異質性パラメータベクトル  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_I)$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_I)$  は含まれない. 式(23)のように, 2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの事前確率密度関数は, ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータ  $\beta$  の事前確率密度関数  $\chi_\beta(\beta)$ , 異質性パラメータの分散を規定するパラメータ  $\phi, \psi$  の事前確率密度関数  $\chi_\phi(\phi)$ ,  $\chi_\psi(\psi)$ , コピュラの未知パラメータ  $a$  の事前確率密度関数  $\chi_a(a)$  で構成される.

事前確率密度関数  $\chi_\beta(\beta)$  として多次元正規分布  $\beta \sim \mathcal{N}_Z(\mu, \Sigma)$  を用いる. ただし,  $\mathcal{N}_Z(\mu, \Sigma)$  は期待値ベクトルを  $\mu$ , 分散共分散行列を  $\Sigma$  とした  $Z$  次元正規分布である. また, 加速度パラメータ  $m$ , 分散パラメータ  $\phi, \psi$ , コピュラのパラメータ  $a$  の事前確率密度関数と

して, ガンマ分布を  $m \sim \mathcal{G}(p_m^0, q_m^0)$ ,  $\phi \sim \mathcal{G}(p_\phi^0, q_\phi^0)$ ,  $\psi \sim \mathcal{G}(p_\psi^0, q_\psi^0)$ ,  $a \sim \mathcal{G}(p_a^0, q_a^0)$  と設定する. ここに,  $p_m^0, p_\phi^0, p_\psi^0, p_a^0$  はガンマ分布の形状パラメータ,  $q_m^0, q_\phi^0, q_\psi^0, q_a^0$  は尺度パラメータである. ただし,  $a \in (1, \infty)$  の制約があるガンベル・コピュラに関しては  $u = a - 1$  と変数変換し,  $u \sim \mathcal{G}(p_a^0, q_a^0)$  とする. 事前確率密度関数が推計結果に与える影響は, 点検データの増加に伴い薄れていく. 階層ベイズモデルに対しては代表的なMCMC法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法(以下, MH法)を組み合わせさせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている.

## (3) 同時事後確率密度関数の定式化

尤度関数(21)と事前確率密度関数(23)を用いて, ベイズの定理(22)より, 同時事後確率密度関数  $\Pi(\theta|\bar{\Xi}, \varepsilon, \rho)$  を定式化することができる. 本研究で提案する2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの同時事後確率密度関数  $\Pi(\theta|\bar{\Xi}, \varepsilon, \rho)$  は具体的に以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
 & \Pi(\theta|\bar{\Xi}, \varepsilon, \rho) \\
 & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{l_i=1}^{L_i} \left[ \{\exp(\bar{x}_{i,l_i}\beta')m\varepsilon_i\rho_i\bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i-1}\}^{\bar{\delta}_{i,l_i}} \right. \\
 & \cdot \exp\{-\exp(\bar{x}_{i,l_i}\beta')\varepsilon_i\bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i}\} \\
 & \cdot \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon_i^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon_i) \frac{\psi^\psi}{\Gamma(\psi)} \rho_i^{\psi-1} \exp(-\psi\rho_i) \\
 & \cdot c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a) \Big] \\
 & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \mu)\Sigma^{-1}(\beta - \mu)'\right\} \\
 & \cdot \frac{1}{(q_m^0)^{p_m^0} \Gamma(p_m^0)} m^{p_m^0-1} \exp\left(-\frac{m}{q_m^0}\right) \\
 & \cdot \frac{1}{(q_\phi^0)^{p_\phi^0} \Gamma(p_\phi^0)} \phi^{p_\phi^0-1} \exp\left(-\frac{\phi}{q_\phi^0}\right) \\
 & \cdot \frac{1}{(q_\psi^0)^{p_\psi^0} \Gamma(p_\psi^0)} \psi^{p_\psi^0-1} \exp\left(-\frac{\psi}{q_\psi^0}\right) \\
 & \cdot \frac{1}{(q_a^0)^{p_a^0} \Gamma(p_a^0)} \tilde{a}^{p_a^0-1} \exp\left(-\frac{\tilde{a}}{q_a^0}\right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

である. ただし,

$$G(\varepsilon_i) = \frac{\tilde{\gamma}(\phi, \phi\varepsilon_i)}{\Gamma(\phi)} \quad (25a)$$

$$H(\rho_i) = \frac{\tilde{\gamma}(\psi, \psi\rho_i)}{\Gamma(\psi)} \quad (25b)$$

$$c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a) = \begin{cases} \exp[-\{(-\ln G(\varepsilon_i))^a + (-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}}] \\ \cdot \{(\ln G(\varepsilon_i))(\ln H(\rho_i))\}^{a-1} / \{G(\varepsilon_i)H(\rho_i)\} \\ \cdot \{(-\ln G(\varepsilon_i))^a + (-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}-2} \\ \cdot \{(-\ln G(\varepsilon_i))^a + (-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}+a-1} \\ \text{ガンベル・コピュラ} \\ (1+a)\{G(\varepsilon_i)H(\rho_i)\}^{-a-1} \\ \cdot (G(\varepsilon_i)^{-a-1} + H(\rho_i)^{-a-1} - 1)^{-1/a-2} \\ \text{クレイトン・コピュラ} \\ -a \exp(-aG(\varepsilon_i)) \exp(-aH(\rho_i)) \\ \cdot \{\exp(-a)\} / \{\exp(-a)\} \\ + \{\exp(-aG(\varepsilon_i)) - 1\} \{\exp(-aH(\rho_i)) - 1\}^2 \\ \text{フランク・コピュラ} \end{cases} \quad (25c)$$

が成り立つ。なお、 $\tilde{\gamma}(\cdot, \cdot)$  は不完全ガンマ関数である。また、ガンベル・コピュラるとき  $\tilde{a} = a - 1$ 、クレイトン・コピュラとフランク・コピュラるとき  $\tilde{a} = a$  である。なお、 $G(\varepsilon_i : \phi)$ 、 $H(\rho_i : \psi)$  は、異質性パラメータの周辺分布関数であり、 $G(\varepsilon_i)$ 、 $H(\rho_i)$  と簡略化して表記している。

#### (4) 同時事後確率密度関数の推計

2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを推計するためには、複数の未知パラメータと異質性パラメータを推計する必要がある。本研究では、これら全てのパラメータをギブスサンプリングにより同時推計する。各パラメータの条件付き事後確率密度関数を定義する。いま、未知パラメータベクトル  $\beta$  の要素  $\beta_{e_1}$  ( $e_1 = 1, \dots, Z$ ) を除く部分ベクトルを  $\beta_{-e_1}$  と表す。このとき、同時事後確率密度関数  $\Pi(\theta | \Xi, \varepsilon, \rho)$  を用いて、 $\beta_{-e_1}$ 、 $m$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $\beta_{e_1}$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\beta_{e_1} | \beta_{-e_1}, m, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\beta_{e_1} | \beta_{-e_1}, m, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi) \\ & \propto \exp \left[ \sum_{i=1}^I \sum_{l_i=1}^{L_i} \left\{ \tilde{\delta}_{i,l_i} \bar{x}_{i,l_i,e_1} \beta_{e_1} - \exp(\bar{x}_{i,l_i} \beta') \varepsilon_i \bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (\beta - \mu) \Sigma^{-1} (\beta - \mu)' \right] \quad (26) \end{aligned}$$

と表現できる。 $\beta$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $m$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(m | \beta, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(m | \beta, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{l_i=1}^{L_i} \left[ (m \bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i})^{\tilde{\delta}_{i,l_i}} \exp \left\{ - \exp(\bar{x}_{i,l_i} \beta') \varepsilon_i \bar{s}_{i,l_i}^{m\rho_i} \right\} \right] \\ & \quad \cdot m^{p_m^0 - 1} \exp \left( - \frac{m}{q_m^0} \right) \quad (27) \end{aligned}$$

と表現できる。 $\beta$ 、 $m$ 、 $\psi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $\phi$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\phi | \beta, m, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\phi | \beta, m, \psi, a, \varepsilon, \rho, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon_i^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon_i) c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a) L_i \right\} \\ & \quad \cdot \phi^{p_\phi^0 - 1} \exp \left( - \frac{\phi}{q_\phi^0} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

と表現できる。 $\beta$ 、 $m$ 、 $\phi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $\psi$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\psi | \beta, m, \phi, a, \varepsilon, \rho, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\psi | \beta, m, \phi, a, \varepsilon, \rho, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{\psi^\psi}{\Gamma(\psi)} \rho_i^{\psi-1} \exp(-\psi \rho_i) c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a) L_i \right\} \\ & \quad \cdot \psi^{p_\psi^0 - 1} \exp \left( - \frac{\psi}{q_\psi^0} \right) \quad (29) \end{aligned}$$

と表現できる。 $\beta$ 、 $m$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $a$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(a | \beta, m, \phi, \psi, \varepsilon, \rho, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(a | \beta, m, \phi, \psi, \varepsilon, \rho, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \{ c(G(\varepsilon_i), H(\rho_i) : a) L_i \} \tilde{a}^{p_a^0 - 1} \exp \left( - \frac{\tilde{a}}{q_a^0} \right) \quad (30) \end{aligned}$$

と表現できる。さらに、異質性パラメータベクトル  $\varepsilon$  の要素  $\varepsilon_{e_2}$  ( $e_2 = 1, \dots, I$ ) を除く部分ベクトルを  $\varepsilon_{-e_2}$ 、異質性パラメータベクトル  $\rho$  の要素  $\rho_{e_3}$  ( $e_3 = 1, \dots, I$ ) を除く部分ベクトルを  $\rho_{-e_3}$  と表す。このとき、 $\beta$ 、 $m$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon_{-e_2}$ 、 $\rho$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $\varepsilon_{e_2}$  の条件付き確率密度関数  $\Pi(\varepsilon_{e_2} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon_{-e_2}, \rho, \Xi)$  は、尤度関数  $\mathcal{L}(\Xi : \theta, \varepsilon, \rho)$  を用いて、

$$\begin{aligned} & \Pi(\varepsilon_{e_2} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon_{-e_2}, \rho, \Xi) \\ & \propto \prod_{l_{e_2}=1}^{L_{e_2}} \left[ \varepsilon_{e_2}^{\tilde{\delta}_{e_2,l_{e_2}}} \exp \left\{ - \exp(\bar{x}_{e_2,l_{e_2}} \beta') \varepsilon_{e_2} \bar{s}_{e_2,l_{e_2}}^{m\rho_{e_2}} \right\} \right] \\ & \quad \cdot L_{e_2} c(G(\varepsilon_{e_2}), H(\rho_{e_2}) : a) \quad (31) \end{aligned}$$

と表現できる。 $\beta$ 、 $m$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $a$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho_{-e_3}$ 、 $\Xi$  を既知としたときの  $\rho_{e_3}$  の条件付き確率密度関数  $\Pi(\rho_{e_3} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho_{-e_3}, \Xi)$  は、

$$\begin{aligned} & \Pi(\rho_{e_3} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho_{-e_3}, \Xi) \\ & \propto \prod_{l_{e_3}=1}^{L_{e_3}} \left[ \left\{ \rho_{e_3} \bar{s}_{e_3,l_{e_3}}^{m\rho_{e_3}} \right\}^{\tilde{\delta}_{e_3,l_{e_3}}} \right. \\ & \quad \left. \cdot \exp \left\{ - \exp(\bar{x}_{e_3,l_{e_3}} \beta') \varepsilon_{e_3} \bar{s}_{e_3,l_{e_3}}^{m\rho_{e_3}} \right\} \right] \\ & \quad \cdot L_{e_3} c(G(\varepsilon_{e_3}), H(\rho_{e_3}) : a) \quad (32) \end{aligned}$$



表-2 データ概要

機器システム	本線照明	TN 照明	TN 坑外照明
サンプル数	36,024	70,633	7,813
供用開始年	1967~2000 年	1993~2011 年	1968~2000 年
平均点検間隔	19.87	9.64	14.46
システムグループ数	15	14	9

と表現できる。これらの条件付き確率密度関数から未知パラメータおよび異質性パラメータのサンプリングを行う。ただし、これらの条件付き確率密度関数からは直接的にランダムサンプリングすることができないために、MH法を用いて条件付き事後確率密度関数からのサンプリングを行う。なお、具体的なモデル推計手順は付録を参照されたい。

## 5. 実証分析

### (1) 適用データの概要

本研究で提案した方法論の有効性を検討するために、中日本高速道路株式会社管轄の3種類の機器システムの点検データを用いて、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルによる分析を行う。本研究では、1) 本線照明、2) トンネル照明（以下、TN照明）、3) トンネル坑外照明（以下、TN坑外照明）の、3種類の機器システムに関する点検データを獲得している。それぞれの機器システムのデータ概要を表-2に示す。また、これらの点検データは、当該機器システムの状態が、故障の有無の2値状態で表現されているが、照明施設に関しては、ランプの不点の有無ではなく、灯具本体の故障の有無に関するデータが獲得されている。本研究では、2004年から2014年にかけて実施された点検データの結果に基づいてサンプルを作成し、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータを推計している。2.(3)で詳述したように、機器システムの更新施策は、一括更新あるいは逐次更新に大別される。今後、本研究の方法論で評価可能となる2次元異質性によって、機器システム全体の保全計画立案を行うことも可能となる。そこで、異質性パラメータを設定するためのグルーピングに関しても、実務上一括更新が可能なグループを形成する必要がある。本研究においては、1) 道路付帯システムを施設の種類のグルーピングし、2) それぞれのシステムグループを路線Aから路線Sまでの19路線ごとにグルーピングすることにより、システムグループを形成した。このようなグルーピングの方法によって、本研究では38グループを形成することができた。表-3には、それぞれのシステムグループの機器システム、路線、サンプル数を示す。

表-3 システムグループの詳細

システムグループ	機器システム	路線	サンプル数
1	本線照明	A	813
2	本線照明	B	1,630
3	本線照明	C	260
4	本線照明	D	487
5	本線照明	E	177
6	本線照明	F	134
7	本線照明	G	7,385
8	本線照明	H	228
9	本線照明	I	1,428
10	本線照明	J	118
11	本線照明	K	15,444
12	本線照明	L	2,006
13	本線照明	M	453
14	本線照明	N	2,928
15	本線照明	O	2,533
16	TN照明	A	112
17	TN照明	C	506
18	TN照明	F	131
19	TN照明	G	14,713
20	TN照明	H	2,608
21	TN照明	I	13,735
22	TN照明	J	597
23	TN照明	K	18,709
24	TN照明	L	363
25	TN照明	N	9,250
26	TN照明	O	777
27	TN照明	P	2,647
28	TN照明	Q	2,900
29	TN照明	R	3,585
30	TN坑外照明	A	16
31	TN坑外照明	G	2,607
32	TN坑外照明	H	6
33	TN坑外照明	I	1,107
34	TN坑外照明	J	154
35	TN坑外照明	K	836
36	TN坑外照明	N	1,977
37	TN坑外照明	O	463
38	TN坑外照明	S	647

### (2) パラメータ推計結果

中日本高速道路株式会社が保有する機器システムに関する点検データを用いて、コンピュータを導入した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータを推計した。本研究では、機器システムの劣化過程のモデル化を対象としており、それぞれの機器システムの異質性は離散的なタイプ分類で表現できる。2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは、特性変数ベクトル  $x_{li}$

表-4 パラメータの推計結果

定数項 $\beta$	加速度パラメータ $m$	$\varepsilon_i$ の分散パラメータ $\phi$	$\rho_i$ の分散パラメータ $\psi$	コピュラパラメータ $a$
-13.5	4.00	1.50	6.20	3.73
(-13.6, -13.2)	(3.92, 4.06)	(1.47, 1.52)	(6.15, 6.25)	(3.42, 4.08)
0.80	-0.88	-0.042	0.069	0.028

注) 第1行はパラメータサンプルの期待値, 第2行はパラメータ推計値の90%信用域の下限値と上限値, 第3行はGeweke検定統計量を表している.

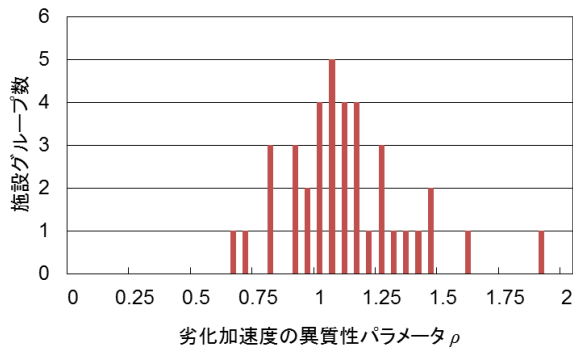


図-3 劣化加速度の異質性パラメータ分布

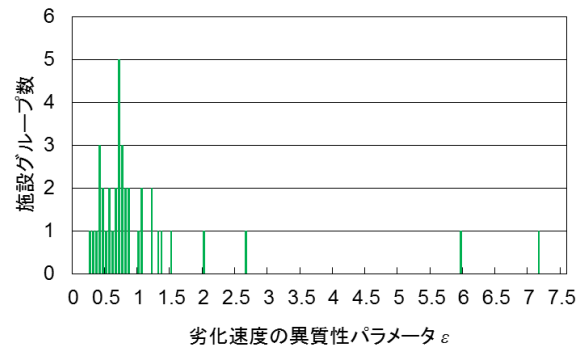


図-4 劣化速度の異質性パラメータ分布

を考慮することによっても、機器間の劣化過程の差異を表現できる。本実証分析では、複数種類の機器システムを対象としているが、それら全てで共通して観測される特性変数が獲得不可能であったため、以下では、異質性パラメータのみを用いて機器システム間の劣化過程の差異を表現することとする。したがって、本研究において推計したパラメータは、ハザード率の定数項パラメータ  $\beta$ 、加速度パラメータ  $\alpha$ 、38個のシステムグループそれぞれの劣化速度の異質性パラメータ  $\varepsilon_i$ 、劣化加速度の異質性パラメータ  $\rho_i$ 、劣化速度の異質性パラメータが従うガンマ分布の分散パラメータ  $\phi$ 、劣化加速度の異質性パラメータが従うガンマ分布の分散パラメータ  $\psi$ 、コピュラパラメータ  $a$  となる。ベイズ推計によって得られたパラメータの推計値、ベイズ推計の90%信用域、Geweke検定統計量を表-4に示す。さらに、表-4の未知パラメータに加え、2次元異質性のパラメータに関しても、同時推計している。同時推計された異質性パラメータの分布を図-3、図-4に示す。劣化加速度の異質性パラメータは平均1、分散  $1/\phi$  のガンマ分布に、劣化速度の異質性パラメータは平均1、分散  $1/\psi$  のガンマ分布に従うと仮定している。劣化加速度の異質性パラメータの期待値は1.079、劣化速度の異質性パラメータの期待値は1.111となっている。また、本研究では、表-1に示した3種類のコピュラを用いて、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメー

タの推計を行っている。各コピュラを含むモデル全体のAICは、ガンベル・コピュラの時278,400、クレイトン・コピュラの時278,130、フランク・コピュラの時276,440となり、AICがもっとも小さいフランク・コピュラを採択した。なお、MCMC法におけるサンプリング回数を  $\bar{n} = 15,000$ 、バーンイン回数を  $\underline{n} = 5,000$  とした。

以上の推計されたパラメータを用いて全38グループの生存関数を求めた。これらの生存関数を一括して図-5に示す。2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを用いることにより、38グループそれぞれの機器システムの劣化過程を表現することができる。同図では、本線照明の生存関数を茶色、TN照明の生存関数を赤色、TN坑外照明の生存関数を青色で示している。また、同図の黒色破線は、機器システム全体の平均的な劣化過程を表すベンチマーキングケースとなっている。生存確率が50%に達するまでに要する経過年数は、最も短いグループ(システムグループ22、図中赤色一点鎖線)で4.56年であった。また、生存確率が50%に到達するまでに50年以上かかるグループは、TN照明やTN坑外照明などの5グループ(図中二点鎖線)であった。これらのシステムグループに関しては、新設から5年程度しか経過していない路線の機器システムであり、故障データの蓄積が十分にできていないものであった。今後、十分にデータを蓄積していくことによって、より

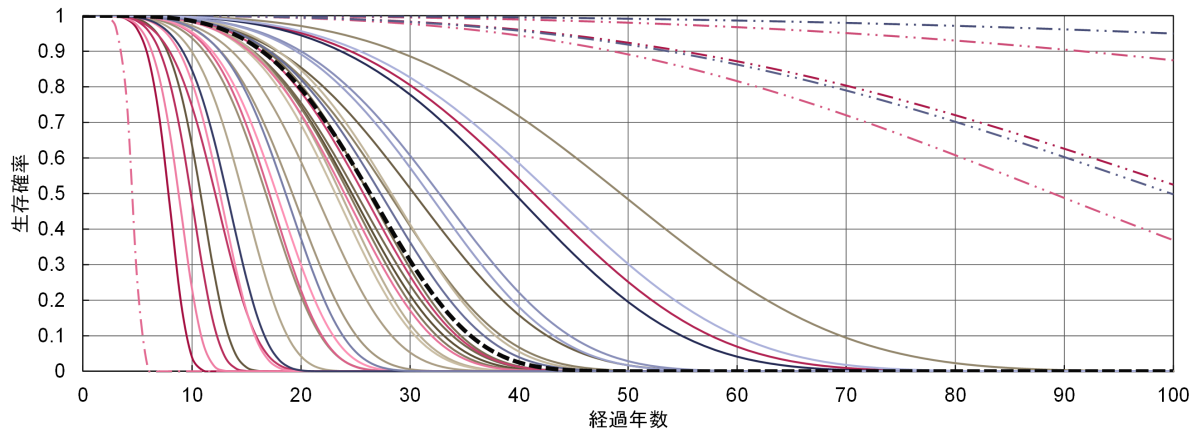


図-5 各機器システムグループの劣化過程

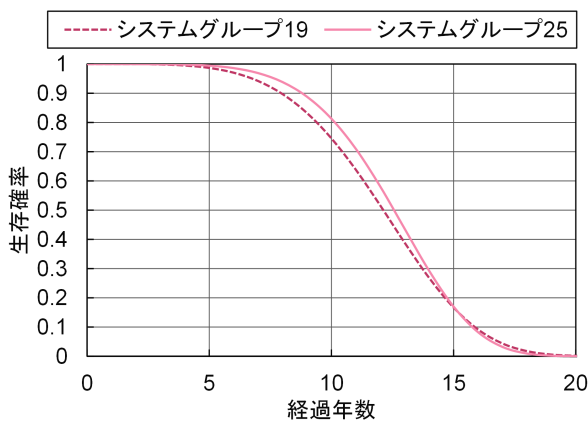


図-6 比例的でない劣化過程の例

精緻な分析を行うことができると考えられる．このように，機器システムに関しては，施設種別や施設の置かれている環境条件により，その劣化過程は多様化し，グループ間に大きな差異が存在することがわかる．

ワイブル劣化ハザードモデルの劣化過程の異質性を考慮可能としたランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルでは，システムグループ間の劣化過程の差異を比例的にしか表現できなかったため，生存関数が交錯するような劣化過程を表現することは不可能であった．一方，図-6には，図-5に示した生存関数のうち，システムグループ19とシステムグループ25のみを示している．供用開始から約15年間はシステムグループ25の機器システムの生存確率の方が高い値をとるが，約15年を境に生存関数が交錯し，その後の両システムの生存確率が逆転している．このように，2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを用いることにより，比例的ではない，より複雑な劣化過程の差異を表現することが可能となっていることが確認できる．

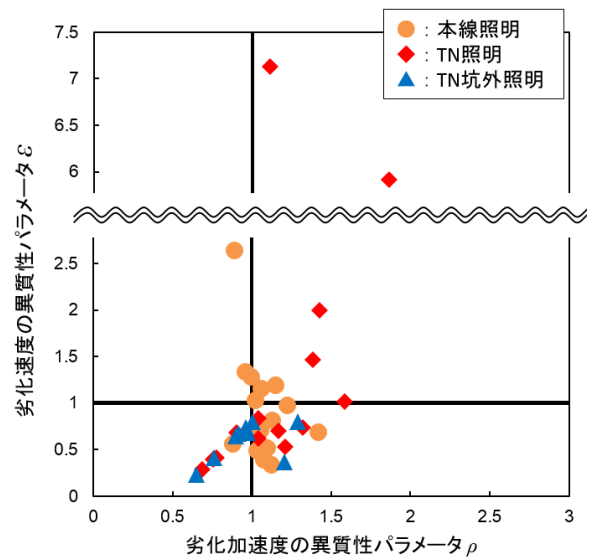


図-7 2次元異質性パラメータ

### (3) コピュラと2次元異質性の同時分布

本研究では，2次元異質性パラメータの推計のために，コピュラを導入することにより，2次元異質性パラメータの同時分布をコピュラと2次元異質性パラメータの周辺分布によって表現することができる．まず，図-7には，2次元異質性パラメータの散布図を示している．横軸を劣化加速度の異質性パラメータ $\rho$ ，縦軸を劣化速度の異質性パラメータ $\varepsilon$ としている．第1象限( $\rho_i \geq 1$ ， $\varepsilon_i \geq 1$ )に位置するシステムグループの中では，TN照明のシステムグループが劣化速度，劣化加速度の異質性パラメータの双方が特に大きい値を示す傾向にある．これらのシステムグループに関しては，短い間隔で点検を行い，故障の発生が発見され次第，一括更新を実施するといった重点的な管理体制を敷く必要があると

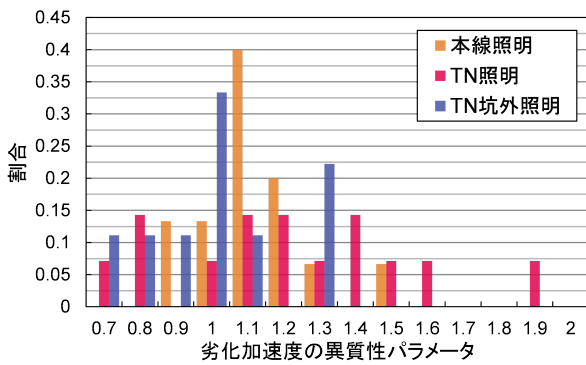


図-8 システムグループごとの劣化加速度の異質性分布

考えられる。一方、第3象限 ( $\rho_i < 1, \varepsilon_i < 1$ ) には、TN 坑外照明のシステムグループが多い。このシステムグループ群に関しては、定期点検などの際に故障が確認された施設に対して、逐次更新を行っていく必要があると考えられる。なお、各象限に位置するシステムグループの劣化特性とそれに対する維持管理施策に関しては、5.(4) で詳述するので併せて参照されたい。また、これらの結果に対して劣化加速度の異質性に着目して、システムグループの故障が偶発的故障か消耗系故障であるかを論ずることができる。すなわち、劣化加速度の異質性パラメータが1.0周辺で分布している場合には偶発的故障、それ以外の場合には消耗系故障として考えることが可能である（仮説検定を実施することにより統計的に厳密な議論が可能である）。図-8には、個々のシステムグループの劣化加速度の異質性パラメータに関して、3種類のシステムごとにその分布を示した。なお、縦軸の割合は、3種類のシステム個々のシステムグループ数で規格化した値である。同図において、TN 照明では、劣化加速度の大きいグループから小さいグループまで幅広く分布している。偶発的故障か、消耗系故障かを実務的に検討する場合には、特に異質性パラメータの大きいシステムグループに留意が必要である。このことに関して、同図中で異質性パラメータの大きいトンネルの一部では、トンネル内という閉鎖的な空間において、重交通による煤煙や凍結防止剤の飛散が日々一定量蓄積されることにより、劣化が加速されるために消耗系故障と位置づけられるものと考えられる。一方で、これらの影響が少ないトンネルでは、初期不良や個々の機器そのものの寿命など複数種類の要因による偶発的故障が発生する。本線照明や TN 坑外照明においても同様の考え方により偶発的故障が顕著となっている。

さらに、以下では2種類の異質性パラメータ間の相関構造とその同時分布に着目する。コンピュータパラメータ  $a$  は  $a = 3.73$  と正の値をとっている。すなわち、2次元

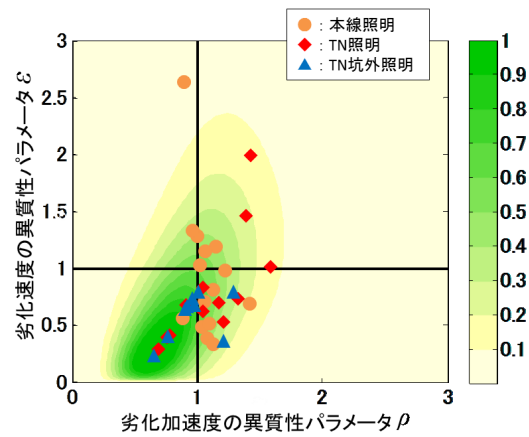


図-9 2次元異質性パラメータの同時確率密度関数

異質性パラメータは正の相関構造を有していることがわかる。劣化加速度の異質性パラメータの最大値1.86をとるシステムグループ22は、劣化速度の異質性パラメータに関して2番目に大きい  $\varepsilon_{22} = 5.92$  をとっている。すなわち、このシステムグループ22の劣化過程は、機器システム全体の平均的な劣化過程よりも、劣化加速度と劣化速度の両面から、相対的に速くなる傾向にあることがわかる。実際に、図-5においても、システムグループ22に該当する生存関数は、最も劣化の進展が速い一点鎖線で示した劣化過程となっている。

5.(2) で示したように、コンピュータの推計パラメータと2次元異質性の周辺分布を用いて2次元異質性パラメータの同時分布を導出する。先述したように、本適用事例では、フランク・コンピュータが選定されている。したがって、以下では、フランク・コンピュータの確率密度関数と2次元異質性の周辺分布関数を用いて、2次元異質性の同時確率密度関数を表現することとする。図-9に2次元異質性パラメータの同時確率密度関数を示す。同図から、劣化加速度の異質性パラメータ  $\rho$  が  $\rho = 0.5$  程度の小さい値となる場合、劣化速度の異質性パラメータ  $\varepsilon$  は限りなく小さい値となる傾向にあることがわかる。一方、劣化加速度の異質性パラメータ  $\rho$  が大きくなるに従い、劣化速度の異質性パラメータ  $\varepsilon$  についても大きい値をとる確率が高くなるが見取れる。システムグループが第1象限に生起する同時確率は0.267、第2象限は0.151、第3象限は0.443、第4象限は0.139であり、第1象限と第3象限の同時生起確率が大きいことから、正の相関が顕著に表れていることがわかる。図-9で示された同時分布の形状から、劣化加速度の異質性パラメータ  $\rho$  の小さな変動に対しても、劣化速度の異質性パラメータ  $\varepsilon$  の変動が大きくなることを確認できる。これは、本適用対象となる機器システムの保全計画を立案していく際には、システムグループ

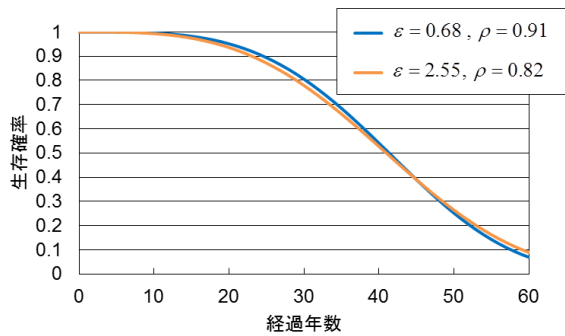


図-10 2次元異質性パラメータの選択問題

ごとの劣化加速度の異質性を考慮しなければならないことを示唆している。

また、コンピュータを用いることにより、2.(4)で述べたようなパラメータの推計値ペアの選択問題を解消している。例えば、2次元異質性パラメータの推計値が $(\rho, \varepsilon) = (0.91, 0.68)$ となったシステムグループ $l$ に着目する。図-10には、システムグループ $l$ の生存関数と、2次元異質性パラメータの組み合わせが $(\rho, \varepsilon) = (0.82, 2.55)$ のときの生存関数を示している。図-10に示すように、これらのパラメータの組み合わせから算出される生存関数は互いに極めて類似している。しかし、コンピュータと2次元異質性の周辺分布から導出される同時確率は、 $(\rho, \varepsilon) = (0.91, 0.68)$ のとき $7.11 \times 10^{-3}$ 、 $(\rho, \varepsilon) = (0.82, 2.55)$ のとき $2.75 \times 10^{-4}$ である。すなわち、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの尤度関数にコンピュータが含まれることにより、図-10のような2次元異質性パラメータの組み合わせに対しても、適切に選択することが可能となる。

#### (4) 実務的示唆

2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの開発により、劣化過程の差異を構成する劣化加速度の異質性と劣化速度の異質性という2種類の異質性を考慮した劣化モデルの推計が可能となる。さらに、コンピュータを用いて2次元異質性の相関構造を明らかにすることにより、以下に示すような実務的示唆を得ることができる。

すでに述べたように、機器システムの保守を実行するためには、機器システムの劣化を予測することにより、部品の調達や保守を実施する技術者等を維持しなければならない。特に、機器システムに関しては、運用期間中にもかかわらず、同種の機器が製造中止となり、入手が困難になることも少なくないため、交換機器を備蓄することが必要である。あるいは、機器システムの予防保全を実施するために、機器の更新間隔を合理的に決定することが必要となる。本研究で提案し

た方法論を用いて、2次元異質性を定量化したことにより、図-7に示すように異質性パラメータの散布図を作成することができる。同図より、機器システム全体の平均的な劣化過程をベンチマーキングケースとして、3つのシステムグループ群に大別できることが理解できる。すなわち、1) 第1象限に属するシステムグループは、相対的に劣化加速度も劣化速度も速く、長寿命化を重点的に検討することが必要である。2) 第4象限に属するシステムグループは、劣化加速度が相対的に大きく、劣化の発生時期に応じて一括更新を行う施策を検討する必要がある。3) 第2象限や第3象限に位置するシステムグループに関しては、劣化加速度は相対的に小さくなるため、定期的に点検を行い、故障機器に関して逐次更新していくことが重要であると考えられる。なお、具体的に一括更新、逐次更新が望ましいかを検討するためには、システムを構成する機器の調達費用だけでなく、取り替え工事を実施するための固定費用や交通規制により発生する社会的費用を考慮することが必要である。これらの固定費用や社会的費用は管理対象となる道路区間によって多様に異なるため、路線ごとに最適な取り替え戦略を分析することが必要となる。本研究で推計した2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを用いることにより、最適取り替え戦略を具体的に求めるための方法論を提案することができるが、本研究の域を超えており今後の課題としたい。

さらに、コンピュータを用いることにより、図-9に示すように、2次元異質性パラメータの同時分布と各機器システムグループとの対応関係を分析することができる。各システムグループ群に属する機器システムの割合を把握することにより、交換機器の備蓄を適切に行う管理体制を構築するための有益な知見を獲得することができる。たとえば、ある路線に対して新たな機器システムの導入を検討する際、当該路線周辺の路線に設置されている同種のシステムの2次元異質性と、その相関構造から読み取れる劣化傾向を予測することにより、保全計画の立案をあらかじめ行うことも可能である。また、図-7において劣化速度の異質性パラメータが7.13, 5.91と推計された2路線の機器システムは、同種のシステムグループ(TN照明)に属する他の機器システムと比較して、明らかに照明ランプの劣化速度が大きい結果になっている。本システムの劣化速度の異質性に関する個別検討の結果、その原因は当該トンネル固有の環境要因に起因することが判明した。この事例でもわかるように、異質性パラメータを用いた相対評価により、個別に重点的に検討すべき対象システム群を選別することも可能である。

## 6. おわりに

本研究では、機器システム間の劣化過程の差異を、2種類の異質性パラメータを用いて表現し、劣化予測を行う方法論を構築した。具体的には、個々の機器システムグループが有する劣化過程の差異を、劣化加速度の異質性および劣化速度の異質性という2次元異質性を導入したような2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを提案した。また、2次元異質性の相関構造を明らかにするために、コンピュータを用いた推計方法を提案している。2次元異質性の周辺分布とコンピュータを用いた同時分布を表現することにより、個々の機器システムグループの劣化特性の差異を2次元空間上で相対評価することが可能になった。また、2.4に詳述したように、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータ推計において発生するパラメータの推計値ベア選択における任意性を克服することが可能となる。

今後、検討する必要があるいくつかの課題について以下に述べる。第1に、本研究の適用対象としては、高速道路上の機器システム以外にも多様な社会基盤施設が考えられる。これらの適用事例を通じて、2次元異質性の相関関係に関する知見を蓄積し、方法論の改善を図ることが重要である。第2に、2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルと異質性パラメータの推計結果を用いて、機器システムの取り替え・更新戦略を分析するための方法論を開発することが必要となる。実際の機器システムのアセットマネジメントを実施するためには、ライフサイクル費用やリスク管理水準を勘案した総合的な評価によって取り替え・更新施策を決定する必要がある。第3に、社会基盤施設の劣化状態は本研究でとりあげたような2値変数でなく、複数のレーティング（もしくは、健全度）で記述される場合が少なくない。このような場合に対応した時間依存型劣化予測モデルとして、多段階ワイブル劣化ハザードモデル<sup>8)</sup>がすでに提案されている。よって、多段階ワイブル劣化ハザードモデルを、本研究で提案した2次元異質性を考慮できるモデルへと発展させていくことが必要である。

謝辞：本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費助成事業「特別研究員奨励費」により実施された。ここに記して感謝の意を表する。

### 付録 モデル推計手順

2次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの推計手順を以下と付図-1で説明する。

ステップ 1 事前分布のパラメータ値  $\mu, \Sigma, p_m^0, q_m^0, p_\phi^0, q_\phi^0, p_\psi^0, q_\psi^0, p_a^0, q_a^0$  を設定する。

#### ステップ1

- 事前分布のパラメータ  $\mu, \Sigma, p_m^0, q_m^0, p_\phi^0, q_\phi^0, p_\psi^0, q_\psi^0, p_a^0, q_a^0$  を設定する
- 未知パラメータ  $\theta$  の初期値  $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, m^{(0)}, \phi^{(0)}, \psi^{(0)}, a^{(0)})$ 、異質性パラメータの初期値  $\varepsilon^{(0)}, \rho^{(0)}$  を設定する
- バーンイン  $n$ 、アルゴリズムの終了回数  $\bar{n}$  を設定する
- $n=1$  とする

#### ステップ2

- 未知パラメータ  $\theta^{(n)}$ 、異質性パラメータ  $\rho^{(n)}, \varepsilon^{(n)}$  を以下の順序で反復的にサンプリングする

##### ステップ2-1

- 未知パラメータ  $\beta_1^{(n)}$  を  $\Pi(\beta_1^{(n)} | \beta^{(n-1)}, m^{(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

⋮

- 未知パラメータ  $\beta_z^{(n)}$  を  $\Pi(\beta_z^{(n)} | \beta^{(n-1)}, m^{(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-2

- 未知パラメータ  $m^{(n)}$  を  $\Pi(m^{(n)} | \beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-3

- 未知パラメータ  $\phi^{(n)}$  を  $\Pi(\phi^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-4

- 未知パラメータ  $\psi^{(n)}$  を  $\Pi(\psi^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-5

- 未知パラメータ  $a^{(n)}$  を  $\Pi(a^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-6

- 異質性パラメータ  $\varepsilon_1^{(n)}$  を  $\Pi(\varepsilon_1^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

⋮

- 異質性パラメータ  $\varepsilon_r^{(n)}$  を  $\Pi(\varepsilon_r^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

##### ステップ2-7

- 異質性パラメータ  $\rho_1^{(n)}$  を  $\Pi(\rho_1^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

⋮

- 異質性パラメータ  $\rho_r^{(n)}$  を  $\Pi(\rho_r^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする

#### ステップ3

- 収束判定

$n > \bar{n}$

No

Yes

$(\theta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho^{(n)})$  を記録

#### ステップ4

- アルゴリズムの終了判定

$n \geq \bar{n}$

No

Yes

アルゴリズムの終了

付図-1 推計フロー

また、未知パラメータ  $\theta$  の初期値  $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, m^{(0)}, \phi^{(0)}, \psi^{(0)}, a^{(0)})$ 、異質性パラメータの初期値  $\varepsilon^{(0)}, \rho^{(0)}$  を設定する。初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく。サンプリ

ング回数を  $n = 1$  に設定する. バーンイン回数  $\underline{n}$ , アルゴリズムの終了回数  $\bar{n}$  を設定する.  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 1$ ,  $e_3 = 1$  と設定する.

**ステップ 2** 未知パラメータ値  $\theta^{(n)}$  ( $n = 1, \dots, \bar{n}$ ), 異質性パラメータ値  $\rho^{(n)}$ ,  $\varepsilon^{(n)}$  を以下の手順でサンプリングする.

**ステップ 2-1** 未知パラメータベクトル  $\beta^{(n)}$  の各要素  $\beta_{e_1}^{(n)}$  ( $e_1 = 1, \dots, Z$ ) を式 (26) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\beta_{e_1}^{(n)} | \beta_{-e_1}^{(n-1)}, m^{(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-2** 未知パラメータ  $m^{(n)}$  を式 (27) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(m^{(n)} | \beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-3** 未知パラメータ  $\phi^{(n)}$  を式 (28) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\phi^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-4** 未知パラメータ  $\psi^{(n)}$  を式 (29) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\psi^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, a^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-5** 未知パラメータ  $a^{(n)}$  を式 (30) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(a^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \varepsilon^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-6** 異質性パラメータ  $\varepsilon_{e_2}^{(n)}$  ( $e_2 = 1, \dots, I$ ) を式 (31) の条件付き確率密度関数  $\Pi(\varepsilon_{e_2}^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon_{-e_2}^{(n-1)}, \rho^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 2-7** 異質性パラメータ  $\rho_{e_3}^{(n)}$  ( $e_3 = 1, \dots, I$ ) を式 (32) の条件付き確率密度関数  $\Pi(\rho_{e_3}^{(n)} | \beta^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho_{-e_3}^{(n-1)}, \Xi)$  からランダムサンプリングする.

**ステップ 3** 十分大きな  $\underline{n}$  に対して  $n > \underline{n}$  ならば  $(\theta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho^{(n)})$  を記録する.

**ステップ 4**  $n = \bar{n}$  ならば計算を終了する.  $n < \bar{n}$  ならば  $n = n + 1$  としステップ 2-1 へ戻る.

十分大きな  $\underline{n}$  に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば, ギブスサンプリングによる  $(\theta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \rho^{(n)})$  ( $n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n}$ ) のサンプリングは, 同時事後確率密度関数  $\Pi(\theta | \Xi, \varepsilon, \rho)$  からのサンプリングと等しくなる. したがって, ギブスサンプリングによって得られるこれら

の標本  $\theta^{(n)}$  を用いて, パラメータベクトル  $\theta$  の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる. さらに, 異質性パラメータに関しても, 条件付き確率密度関数  $\Pi(\varepsilon_{e_2} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon_{-e_2}, \rho, \Xi)$ ,  $\Pi(\rho_{e_3} | \beta, m, \phi, \psi, a, \varepsilon, \rho_{-e_3}, \Xi)$  からサンプリングした標本を用いて, 異質性パラメータに関する統計量を算出することができる.

## 参考文献

- 1) 山本浩司, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司, 菱田憲輔: 技術的陳腐化を考慮した大規模情報システムの最適更新戦略, 土木学会論文集 F, Vol.65, No.2, pp.264-283, 2009.
- 2) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 3) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 4) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 5) 貝戸清之, 山本浩司, 小濱健吾, 岡田貢一, 小林潔司: ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル, 交通管制システムへの適用, 土木学会論文集 F, Vol.64, No.2, pp.115-129, 2008.
- 6) Shin, H. C. and Madanat, S.: Development of a stochastic model of pavement distress initiation, *J. Infrastructure Plan. and Man.*, JSCE, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
- 7) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 8) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 9) 貝戸清之, 小林潔司, 青木一也, 松岡弘大: 混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計, 土木学会論文集 D3, Vol.68, No.4, pp.255-271, 2012.
- 10) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 11) Maher, M. J. and Summersgill, I.: A comparative methodology for the fitting predictive accident models, *Accident Analysis & Prevention*, Vol.28, pp.281-296, 1996.
- 12) Piegorisch, W. W.: Maximum likelihood estimation for the negative binomial dispersion parameter, *Biometrika*, Vol.46, pp.863-867, 1990.
- 13) 戸坂凡展, 吉羽要直: コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 日本銀行金融研究所, 金融研究, pp.115-162, 2005.
- 14) Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
- 15) 貝戸清之, 坂井康人, 塚本成昭, 水谷大二郎, 小林潔司: 多階層混合マルコフ劣化ハザードモデル: ジョイント劣化評価への適用, 土木学会論文集 F4, Vol.71, No.1, pp.1-18, 2015.
- 16) 水谷大二郎, 小濱健吾, 貝戸清之, 小林潔司: 社会基盤施設の多元的劣化過程モデル, 土木学会論文集 D3, Vol.72, No.1, pp.34-51, 2016.
- 17) Sklar, A.: Random variables, joint distribution functions, and copulas, *Kybernetika*, Vol.9, No.6, pp.449-460, 1973.

- 18) Gumbel, E. J.: Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
- 19) Clayton, D. G.: A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
- 20) Frank, M. J.: On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ , *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.
- 21) Romano, C.: Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market, *Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati*, Vol.12, 2002.
- 22) Deheuvels, P.: Non parametric tests of independence, *Statistique non Paramétrique Asymptotique Lecture Notes in Mathematics*, Vol.821, pp.95-107, 1980.
- 23) Breymann, W., Dias, A. and Embrechts, P.: Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quantitative Finance*, Vol.3, No.1, pp.1-14, 2003.
- 24) 小西貞則, 北川源四郎: 予測と発見の科学 情報量基準, 朝倉書店, 2006.

(2015. 5. 11 受付)

## TWO-DIMENSIONAL WEIBULL MIXTURE DETERIORATION HAZARD MODEL

Kiyoshi KOBAYASHI, Daijiro MIZUTANI, Kakuya MATSUSHIMA, Kouji YAMAMOTO,  
Kiyoyuki KAITO and So SAKAGUCHI

Deterioration rates and accelerations of an expressway equipment system vary dependent on its type and installation location. Moreover, in the asset management of the equipment system, it is necessary to quantify the failure process at arbitrary assessment units and decide the optimal management policy. This paper proposes a two dimensional Weibull mixture hazard model in order to estimate heterogeneities among deterioration rates and accelerations of each equipment. And furthermore, the authors develop a Bayesian estimation method of the two dimensional Weibull mixture hazard model. At that time, two kinds of heterogeneities are expressed as Gamma distributions and their correlation can be described using an Archimedean copula. Lastly, the proposed model is applied to the actual inspection data of an expressway equipment system and the usefulness of the model can be discussed as a case study.